МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Бугульминский филиал
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Контрольная работа
5 семестр

Для бакалавриатов направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии» заочной формы обучения

Бугульма, 2023

Указания по выполнению контрольной работы

1.**Номер варианта контрольной работы определяются двумя последними цифрами зачетной книжки.**

2. Работа оформляется в тетради в клетку (оформление решений производить аккуратно, с минимальным количеством исправлений, оставить поля для замечаний) или напечатанной на листах формата А4.

3. Правила оформления решения задач:

- располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя их номер
- перед решением каждой задачи выписывать полностью условие
-решение каждой задачи сопровождать объяснением и заканчивать ответом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ 4
§2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 6
Случайные события 7
Статистическое и классическое определения вероятности 8
Условная вероятность. Вероятность произведения и суммы событий 9
Формула полной вероятности. Формула Байеса 11
Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли 12
Случайные величины 15
Числовые характеристики дискретной случайной величины 17
Математическое ожидание 17
Дисперсия 17
Основные законы распределения дискретных случайных величин 19
Биномиальное распределение 19
Пуассоновское распределение 20
Геометрическое распределение 20
Гипергеометрическое распределение 20
Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики 21
Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин 23
Равномерный закон распределения 23
Показательный закон распределения 24
Нормальный закон распределения 25
§3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 27
Числовые характеристики статистической совокупности. Параметры распределения 31
Графическое изображение статистического распределения 33
§4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ» 35
Общие методические указания к выполнению контрольной работы 35
Таблица вариантов 36
Основная литература 37
Задания 38

§1. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи.

Дж. Сильвестр

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью двух важных правил:

1. ***Правило умножения*:** если из некоторого конечного множества первый элемент можно выбрать n_1 способами, и после каждого такого выбора второй элемент можно выбрать n_2 способами, то оба элемента можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.
2. ***Правило сложения*:** Если из некоторого конечного множества некоторый элемент можно выбрать n_1 способами, а другой элемент можно выбрать n_2 способами, причём первые и вторые способы не пересекаются, то любой из двух элементов можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Размещением из ***n*** элементов по ***m*** элементов называется любое *упорядоченное* подмножество данного множества, содержащее m элементов. Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad 1! = 1, \quad 0! = 1.$$

Перестановкой из ***n*** элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Сочетанием из ***n*** элементов по ***m*** элементов называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества. Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если при выборке m элементов из n элементов элементы возвращаются, то говорят, что это ***размещения с повторениями***. Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m элементов ***с повторениями*** называются группы, содержащие m элементов, причём каждый элемент принадлежит одному из n типов. Число различных сочетаний из n элементов по m элементам с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Примеры.

1. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т. е. P_5=5!=120. Ответ: 120.

2. В студенческой группе 10 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать для выполнения задания двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения двух девушек можно выбрать $10 \cdot 9 = 90$ способами, а двух юношей – 6·5=30 способами. Следует выбрать двух девушек или двух юношей. По правилу сложения таких способов выбора будет: 90+30=120. Ответ: 120.

3. В высшей лиге по футболу 16 команд. Борьба идёт за золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между командами?

Решение. Необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трёх элементов, отличающихся составом (номерами команд) или порядком их размещения. Таким образом, имеем дело с размещением:

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{13!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360 \text{ способов.}$$ Ответ: 3360.

4. В кондитерском магазине продавалось 4 сорта пирожных: эклеры, песочные, наполеоны и слоёные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Покупка не зависит от того, в каком порядке укладывают купленные пирожные в коробку. Следовательно, количество различных покупок равно количеству сочетаний четырёх видов пирожных по семь:

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot(10-7)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Ответ: 120.

5. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 6?

Решение. Все трёхзначные числа, составленные из цифр 1, 2, 5, 6, отличаются друг от друга либо порядком их следования, либо самими цифрами (например, 122 или 653). Следовательно, они являются размещениями из 4 элементов по 3 с повторениями, т. е. $\overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$. Ответ: 64.

6. В коробке 4 синих, 5 красных и 3 белых карандаша. Сколькими способами можно выбрать 2 карандаша одного цвета?

Решение. 2 белых карандаша из 3 можно C_3^2 способами, 2 красных из 5 можно выбрать C_5^2 способами и 2 синих из 4 – C_4^2 способами. Значит по правилу сложения общее число способов равно $C_3^2 + C_5^2 + C_4^2$=3+10+6=19. Ответ: 19.

Существует ещё одна причина высокой репутации математики: именно математика даёт наукам определённую меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут.

А. Эйнштейн

§2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорию вероятностей можно определить как раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Методы теории вероятностей широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также во многих задачах экономики, статистики, страхового дела, массового обслуживания.

Математическая статистика – это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс). Следующий этап развития связан с именем Я. Бернулли. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А. Муавру, П. Лапласу, К. Гауссу, С. Пуассону и др. Наиболее плодотворный период свя-

зан с именами П. Л. Чебышева и его учеников А. А. Маркова и А. М. Ляпунова, последующее развитие – с именами С. Н. Бернштейна, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского, Н. И. Смирнова, Б. В. Гнеденко и др.

Задача теории вероятностей заключается в построении вероятностных моделей случайных экспериментов. Вероятностная модель позволяет придать строгий математический смысл таким словам, как «случайность», «событие», «вероятность», «правдоподобный» и т. п., позволяет оценить шансы не появления различных результатов, возможных в данном случайном эксперименте.

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытанием*.

Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесённым на каждую грань числом очков – от 1 до 6).

Случайные события

Результат (исход) испытания называется *событием*.

Будем считать фиксированным комплекс условий S и станем рассматривать некоторую систему событий A, B, C, каждое из которых должно при каждом осуществлении комплекса условий S произойти или не произойти.

Событие называется *достоверным,* если оно обязательно произойдёт, обозначается Ω.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не может произойти, обозначается $\varnothing$.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, которое происходит при одновременном наступлении обоих событий.

Событие, которое состоится , если событие A произойдёт, а B не произойдёт, называется *разностью* событий и обозначается $A - B$.

Если при каждом осуществлении комплекса условий S, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят , что A *влечёт* B и записывают $A \subset B$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е., если при каждой реализации комплекса условий S события A и B оба наступают или оба не наступают, то события A и B называются *равными*; записывают $A = B$.

Событие, состоящее в том, что событие A не происходит, называют *противоположным* для A и обозначают $\overline{A}$.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же опыте. В противном случае события называют *совместными*.

События $A_1, A_2, \ldots A_n$ называются *попарно-несовместными*, если любые два из них несовместны.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют *полную группу*, если

$$A_i \cdot A_j = \varnothing,\ i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Статистическое и классическое определения вероятности

Пусть в n повторяющихся опытах событие A наступило n_A раз. Число n_A называется частотой события A, а отношение

$$\frac{n_A}{n} = P^*(A).$$

Называется относительной частотой (или частостью) события A в рассматриваемой серии опытов.

Статистической вероятностью события A называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе опытов:

$$P^*(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Пусть проводится опыт с n исходами, которые можно представить в виде *полной группы несовместных равновозможных* событий. Такие исходы называются *случаями, элементарными событиями*.

Вероятностью события A называется отношение числа m случаев, благоприятствующих этому событию, к общему числу n случаев, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Из классического определения вероятности вытекают свойства:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

2) $P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1$;

3) Если события A и B несовместные ($A \cdot B = \varnothing$), то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следует запомнить, что $P(A) \approx P^*(A) = \frac{n_A}{n}$.

Пример. В урне находятся 4 белых и 6 чёрных шаров. Найти вероятность, что среди наугад вынутых 5 шаров 2 будут чёрными.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что среди 5 вынутых шаров 2 будут чёрными. Выбрать 5 шаров из 10 можно C_{10}^5 способами (все выборки – неупорядоченные подмножества, состоящие из 5 элементов), т. е. $n = C_{10}^5$. Число способов выбрать 2 чёрных шара из 6 равна C_6^2. Каждому такому выбору соответствует C_4^3 способов выбора 3 белых шаров из 4 белых в урне. Значит по правилу умножения, имеем: $m = C_6^2 \cdot C_4^3$. По формуле находим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{4}{1}}{\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = \frac{60}{6\cdot 7\cdot 6} = \frac{5}{21}.$$

Ответ: 5/21.

Условная вероятность. Вероятность произведения и суммы событий

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A, причём $P(A) \neq 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cdot B)}{P(A)}.$$

Из определения условной вероятности следует, что:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B).$$

Для n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ формула умножения вероятностей имеет вид:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot ...\cdot P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

Событие A называется *независимым* от события B, если его условная вероятность равна безусловной: $P(A|B) = P(A)$.

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

Можно показать, что если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Вероятность суммы двух совместных событий определяется формулой:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Так как A и $\overline{A}$ несовместны и $A+\overline{A}=\Omega$, то:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Пример.

В урне 5 белых и 9 чёрных шаров. Из неё последовательно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что второй шар окажется чёрным при условии, что первый шар был белым?

Решение. Пусть событие A – 1-й шар белый, B – 2-й шар чёрный. Так как событие A произошло, в урне осталось 13 шаров, из них 9 чёрных. Поэтому:

$P(B|A)=\dfrac{9}{13}$. Ответ: 9/13.

Пример.

Найти вероятность, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 5, либо 2, либо тому и другому одновременно.

Решение**.** Пусть событие A – наудачу взятое число кратно 5, а B – число кратно 5. Надо найти $P(A+B)$. Т. к. A и B совместные, то:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Всего двузначных чисел 90. Очевидно, что 45 из них кратны 2, 18 кратны 5 и 9 кратны 2 и 5 одновременно. Поэтому: $P(A)=\dfrac{18}{90}=0{,}2$; $P(B)=\dfrac{45}{90}=0{,}5$; $P(A\cdot B)=\dfrac{9}{90}=0{,}1$ и, следовательно, $P(A+B)$=0,5+0,2-0,1=0,6. Ответ: 0,6.

Пример.

Два стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7. Найти вероятность: 1) только одного попадания в цель; 2) по крайней мере одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

Решение. Пусть A и B – события, состоящие в том, что в цель попал первый и второй стрелок соответственно: $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$.

1) требуется найти вероятность точно одного попадания в цель, т. е.:

$P(\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(B)\cdot P(\overline{A})=\ 0{,}6\cdot(1-0{,}7)+0{,}7\cdot(1-0{,}6)=$

$=0{,}18+0{,}28=0{,}46$. Ответ: 0,46.

2) Пусть событие C состоит в том, что по крайней мере один стрелок попал в цель, тогда $\overline{C}$ – ни один стрелок не попал в цель.

$$P(\overline{C})=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12.$$

Значит, $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}12=0{,}88$. Ответ: 0,88.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события (гипотезы) $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу и событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$. Пусть известны вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$: $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности события A $P(A|H_1), P(A|H_2), ..., P(A|H_n)$. Тогда для события A имеет место формула *полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез H_i, принятых до опыта по результатам уже проведённого опыта, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)$ – полная вероятность.

<u>Пример</u>. Электролампы изготавливаются на 3 заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй – 40%, третий – 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго– 80%, третьего – 85. В магазины поступает продукция всех трёх заводов.

1) Какова вероятность, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

2) Чему равна вероятность того, что лампа изготовлена на втором заводе, если известно, что она стандартная?

<u>Решение</u>**.** Введем обозначения. Пусть событие H_1 – купленная лампа изготовлена на первом заводе, H_2 – лампа со второго завода, H_3 – лампа с третьего завода, и событие A – лампа оказалась стандартной. Из условия задачи следует, что $P(H_1) = 0{,}45$, $P(H_2) = 0{,}40$, $P(H_3) = 0{,}15$. Условные вероятности события A равны: $P(A|H_1) = 0{,}70$, $P(A|H_2) = 0{,}80$, $P(A|H_3) = 0{,}85$.

1) По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$

$$= 0{,}45 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0.85 = 0{,}7625.$$

<u>Ответ</u>: 0,46.

2) Найдём вероятность того, что стандартная лампа со второго завода. По формуле Байеса: $P(H_2 | A) = \dfrac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}7625} \approx 0{,}419$. <u>Ответ</u>: 0,419.

Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли

1. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с одной и той же вероятностью p, независимо от результатов предыдущих опытов. Тогда вероятность того, что событие A произойдёт m раз, определяется *формулой Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m P^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2. Если число испытаний n очень большое ($n \geq 50$), а вероятность p наступления события A очень мала ($np \leq 10$), то для вычисления вероятности используется *формула Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

3. В тех случаях, когда число испытаний n велико, а вероятность p не близка к нулю и единице ($p \neq 0$, $p \neq 1$), для вычисления вероятностей используют *теоремы Муавра-Лапласа*.

Согласно *локальной теореме Муавра-Лапласа* вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по приближенной формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется функцией Гаусса.

Для функции $\varphi(x)$ составлена таблица значений [1, 2, 3], пользуясь которой, следует учитывать, что:

1) функция $\varphi(x)$ четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2) при $x \geq 4$ можно считать, что $\varphi(x)$=0.

4. В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится не менее k_1 раз, но не более k_2 раз, т. е. $P_n(k_1;k_2)$, используют *интегральную теорему Муавра-Лапласа*, согласно которой $$P_n(k_1;k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ называется функцией Лапласа. Для неё составлена таблица значений. Следует помнить, что:

1) функция $\Phi(x)$– нечётная, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

2) при $x\geq 4$ можно считать, что $\Phi(x)$=0,5.

<u>Пример 1</u>. Производится три независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,9. Найти вероятность: 1) одного попадания; 2) не менее двух попаданий в цель.

<u>Решение</u>**.** В данном случае $n=3$, $p=0{,}9$, $q=1-0{,}9=0{,}1$. Пользуясь формулой Бернулли, находим:

1) $P_3(1)=C_3^1\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^2=3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}027$ – вероятность одного попадания;

2) вероятность не менее двух попаданий определяется как сумма вероятностей двух несовместных событий: двух попаданий и трёх попаданий при трёх выстрелах.

$$P_3(k\geq 2)=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^1+C_3^3\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^0=3\cdot 0{,}81\cdot 0{,}1+0{,}9^3=$$
$$=0{,}243+0{,}729=0{,}972.$$

<u>Ответ</u>: 1) 0,027; 2) 0,972.

<u>Пример 2.</u> На лекции по теории вероятностей присутствуют 84 студента. Какова вероятность того, что среди них есть два студента, у которых сегодня день рождения?

<u>Решение</u>. Вероятность того, что у отдельного студента сегодня день рождения можно считать равной $p=\dfrac{1}{365}\approx 0{,}0027$; $n=84$, $np=84\cdot 0{,}0027\approx 0{,}23$ мало, значит, применим формулу Пуассона:

$$P_{84}(2)=\frac{0{,}23^2\cdot e^{-0{,}23}}{2!}\approx 0{,}021.$$

<u>Ответ</u>: 0,021.

Пример 3. Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 единиц (с возвратом). Определить вероятность того, что среди отобранных деталей окажется первого сорта: 1) 40 деталей; 2) не более 50 деталей.

Решение.

1) Воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

По условию задачи, $n = 60$, $m = 40$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$.

Тогда:

$np = 60 \cdot 0{,}8 = 48$, $\sqrt{npq} = \sqrt{48 \cdot 0{,}2} = 3{,}09$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40 - 48}{3{,}09} \approx -2{,}59$.

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(-2{,}59) = 0{,}0139$.

Искомая вероятность $P_{60}(40) \approx \dfrac{0{,}0139}{3{,}09} \approx 0{,}0045$.

2) Вероятность отобрать не более 50 первосортных деталей найдём по формуле $P_{60}(0;50) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

Вычисляем $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0 - 48}{3{,}09} = -15{,}53$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{50 - 48}{3{,}09} = 0{,}65$.

Тогда:

$P_{60}(0;50) \approx \Phi(0{,}65) - \Phi(-15{,}53) = \Phi(0{,}65) + \Phi(15{,}53)$ = 0,4843+0,5 = 0,9843.

Ответ: 1) 0,0045; 2) 0,9843.

Случайные величины

Случайное событие, связанное с некоторым опытом, является качественной характеристикой опыта. Количественной же характеристикой результата проведенного опыта является случайная величина, к рассмотрению которой мы приступаем.

Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает с определённой вероятностью то или иное значение, зависящее от исхода опыта. Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т. д., а их значения – соответствующими строчными буквами: x, y, z и т. д.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество её значений конечно или счётно, т. е. множество её значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$

Вероятность того, что случайная величина $\boldsymbol{X}$ примет значение $\boldsymbol{x}$, обозначают $P(x) = P(X = x)$.

Соответствие между возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X и их вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется *законом распределения* случайной величины X.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть представлен в виде таблицы.

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

События $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ образуют полную систему попарно несовместных событий, поэтому сумма их вероятностей равна единице, т. е.:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Зависимость вероятности p от X, кроме таблицы, задают и графически в виде так называемого *многоугольника распределения*.

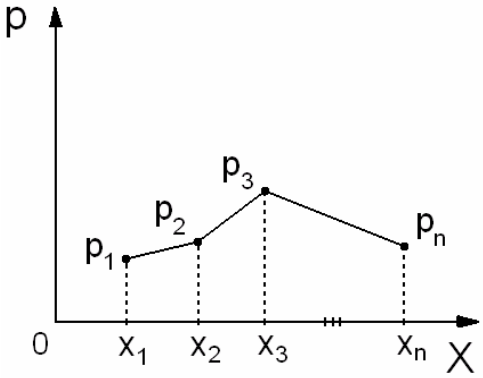


Рисунок 1

Всякую случайную величину X полностью характеризует её *функция распределения вероятности F(x)*:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x),$$

– это вероятность того, что случайная величина X примет значение левее заданной точки x. Для дискретной случайной величины $F(x)$ будет ступенчатой неубывающей функцией.

Свойства функции $F(x)$:

1. $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = 1$;
2. $0 \le F(x) \le 1$;
3. $F(x)$ – неубывающая функция;
4. $F(x)$ непрерывна слева, т. е . $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

<u>Пример</u>**.** Построить функцию распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения:

x_i	0	3,5	10
p_i	0,2	0,5	0,3

<u>Решение</u>**.** Будем задавать различные значения x и находить для них $F(x)$ по формуле:

1. Если $x \le 0$, то, очевидно, $F(x) = P(X < 0) = 0$;
2. Если $0 < x \le 3{,}5$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}2$;
3. Если $3{,}5 < x \le 10$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(x = 3{,}5) = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$;
4. Если $x > 10$, то $F(x) = P(X = 0) + P(X = 3{,}5) + P(X = 10) = 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1$.

Итак, $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}2, & 0 < x \le 3{,}5; \\ 0{,}7, & 3{,}5 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Строим график $F(x)$, рис. 2:

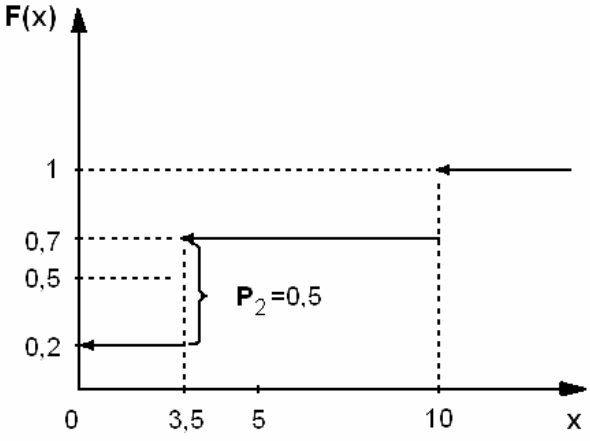


Рисунок 2

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание

Кроме закона распределения, который даёт полное представление о случайной величине, часто используют числа, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют *числовыми характеристиками* случайной величины. Среди числовых характеристик весьма важной является *математическое ожидание*, которое указывает, какое среднее значение случайной величины следует ожидать в результате испытаний или наблюдений.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех её возможных значений x_i на их вероятности p_i:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$.
2. $M(CX) = CM(X)$.
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.
4. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ для независимых с.в.
5. $M(X - MX) = 0$.

Дисперсия

Отклонением называется разность между случайной величиной *X* и её математическим ожиданием *M(X)*, т. е. *X – M(X)*.

Заметим, что отклонение *X – M(X)* и его квадрат $(X - M(X))^2$ также являются случайными величинами.

Дисперсией дискретной случайной величины ***X*** называется математическое ожидание квадрата её отклонения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. $D(X + C) = D(X)$.
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Для вычисления дисперсий более удобной является формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Докажем её, используя свойства математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2) =$$

$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Пример**.** Дискретная случайная величина распределена по закону

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $M(X)$, *D (X).*

Решение**.**

По формуле находим $M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9,$

Затем $M(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}1;$ тогда

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$ Ответ: $M(X)$=0,9; *D (X)*= 1,29.

Заметим, что $\sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратическим отклонением* и обозначается: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Величина $\sigma(X)$ характеризует **“** *разброс***”** (стандартное отклонение) значения случайной величины *X* около её математического ожидания.

Величины *D(X)* и *M(X)* являются частными случаями понятий *центрального и начального момента распределения.*

Начальным моментом *k*-го порядка случайной величины *X* называется математическое ожидание *k*-ой степени случайной величины *X*:

$$\nu_k = M(X^k),$$

или

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины *X* называется математическое ожидание *k-ой* степени отклонения *X* от её математического ожидания:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k.$$

В частности, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0$, $\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X)$.

Приведём ниже формулы, связывающие начальные и центральные моменты:

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;$ $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3;$ $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$

Моменты более высоких порядков применяются редко.

Основные законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Дискретная с. в. X имеет *биномиальное распределение*, если она принимает значения 0, 1, 2, …, n с вероятностями:

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $0 < p < 1,\ q = 1 - p$, m = 0, 1, 2, …, n.

Ряд распределения д. с. в. X, имеющий биномиальное распределение, задаётся в виде:

X	0	1	2	…	m	…	n
p	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Математическое ожидание и дисперсия с. в. X, имеющей биномиальное распределение вычисляются по формулам:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq.$$

Эти формулы полезно знать.

Пример. Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырёх выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,9. Найти $M(X), D(X)$.

Решение. Случайная величина X – число попаданий в цель при четырёх выстрелах – может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, а соответствующие им вероятности находим по формуле Бернулли:

$$P(X = 0) = C_4^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}0001;$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}0036;$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0486;$$

$$P(X = 3) = C_4^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}2916;$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}6561.$$

Итак, искомый закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4
p	0,0001	0,0036	0,0486	0,2916	0,6561

Контроль: $\sum_{m=0}^{4} p_m = 0{,}0001 + 0{,}0036 + 0{,}0486 + 0{,}2916 + 0{,}6561 = 1$.

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}9 = 0{,}36, \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}036.$$

Пуассоновское распределение

Когда число независимых испытаний велико, а вероятность появления события p достаточно мала, прибегают к асимптотической формуле Пуассона:

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

где $m = n \cdot p$ – const.

Для с. в. X, имеющей распределение Пуассона,

$$M(X) = D(X) = m,$$

т. е. параметр m пуассоновского распределения равен одновременно математическому ожиданию и дисперсии с. в. X, имеющей это распределение.

Геометрическое распределение

Вероятность *“сложного события”*, при котором в первых m-1 испытания событие не наступило, а в m испытаниях появилось, по теореме умножения вероятностей вычисляется следующим образом:

$$P(X = m) = q^{m-1} \cdot p, \qquad m=0, 1, 2, \ldots$$

Для с. в. X, имеющей геометрическое распределение,

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

<u>Пример</u>. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдёт при третьем выстреле.

<u>Решение</u>**.** По условию, p = 0,6, q = 0,4, m =3. Искомая вероятность:

$P = q^{3-1} \cdot p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$. <u>Ответ</u>: 0,096.

Гипергеометрическое распределение

Д. с.в. X имеет *гипергеометрическое распределение*, если она принимает значения 0, 1, 2, . . . , $\min(n, M)$ с вероятностями:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где m=0, 1, 2, . . . , $\min(n, M), M \le N, m \le n, n \le N$, n, N, M – натуральные числа.

Математическое ожидание и дисперсия д.с.в. X, имеющей гипергеометрическое распределение, можно вычислить по формулам:

$$M(X)=n\cdot\frac{M}{N},\quad D(X)=n\cdot\frac{M}{N-1}\cdot\frac{(N-m)\cdot(N-n)}{N^2}.$$

Пример. В группе из 16 студентов 3 девушки. Из этой группы наудачу отбираются 2 студента. Составить закон распределения д.с.в. X – числа девушек из отобранных студентов. Найти $M(X)$.

Решение. С.в. X принимает значения 0, 1, 2. Вероятности этих значений находим по формулам: $P(X=0)=\frac{C_{13}^2}{C_{16}^2}=\frac{13}{20}=0{,}65$;

$P(X=1)=\frac{C_{13}^1\cdot C_3^1}{C_{16}^2}=\frac{13}{40}=0{,}325$; $P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{16}^2}=\frac{1}{40}=0{,}025$.

Ряд распределения:

X	0	1	2
p	0,65	0,325	0,025

$M(X)=0\cdot0{,}65+1\cdot0{,}325+2\cdot0{,}025=0{,}375$ или $M(X)=2\cdot\frac{3}{16}=0{,}375$. Ответ: 0,375.

Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Считается, что случайная величина X имеет *непрерывное распределение вероятностей*, если её функция распределения:

$$F(x)=P(X<x),$$

непрерывна на всей числовой прямой.

В случае, когда непрерывная функция распределения $F(x)$ случайной величины X представима в виде:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,$$

где $f(x)\geq 0$, говорят, что X имеет *абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности* $f(x)$.

В точках непрерывности плотности вероятности:

$$f(x)=F'(x).$$

Функция $f(x)$ может рассматриваться как плотность вероятности некоторой случайной величины тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $f(x)\geq 0$ (неотрицательность);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (нормированность).

Для случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ при $a < b$:

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) =$$

$$P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины в промежуток с концами a и b можно интерпретировать геометрически как площадь под графиком плотности вероятности, которая приходится на этот промежуток (рис.3).

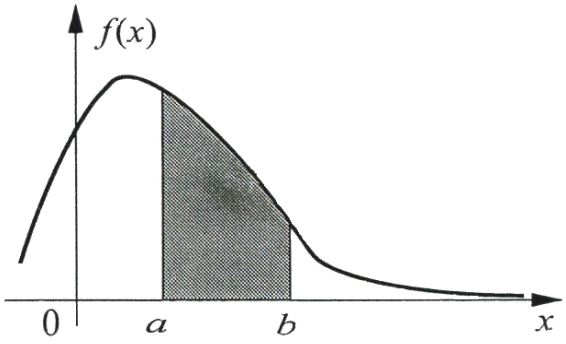


Рисунок 3

Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \right)^2.$$

Начальный момент k-го порядка

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

Центральный момент k-го порядка

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$

<u>Пример</u>**.** Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти параметр *a*, функцию плотности *f(x)*, вероятность того, что с.в. *X* примет значения не менее 1.

<u>Решение</u>**.** Параметр *a* определим из условия непрерывности $F(x)$: $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} F(x)$. Таким образом, $1=\lim\limits_{x\to 2-0} a(x+1)^2=a\cdot 3^2=9a$, откуда $a=\frac{1}{9}$. Следовательно, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Тогда $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x\le -1 \ \textit{или}\ x>2.\end{cases}$

Вероятность того, что с.в. *X* примет значения не менее 1, равна

$$P(X\ge 1)=\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^2 \frac{2}{9}(x+1)dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_1^2=\frac{1}{9}(9-4)=\frac{5}{9}\approx 0{,}556.$$

Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерный закон распределения

Непрерывная с.в. *X* имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a;b]$ (обозначают $X\sim R[a,\ b]$), если её плотность *f (x)* постоянна на этом отрезке, а вне его равна нулю:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \textit{при}\ \ a\le x\le b,\\ 0 & \textit{при}\ \ x<a\ \ \ \textit{и}\ \ \textit{при}\ \ x>b.\end{cases}$$

Соответствующая функция распределения записывается в виде:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textit{при}\ \ x\le a,\\ \frac{x-a}{b-a} & \textit{при}\ a<x\le b,\\ 1 & \textit{при}\ \ x>b.\end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 4.

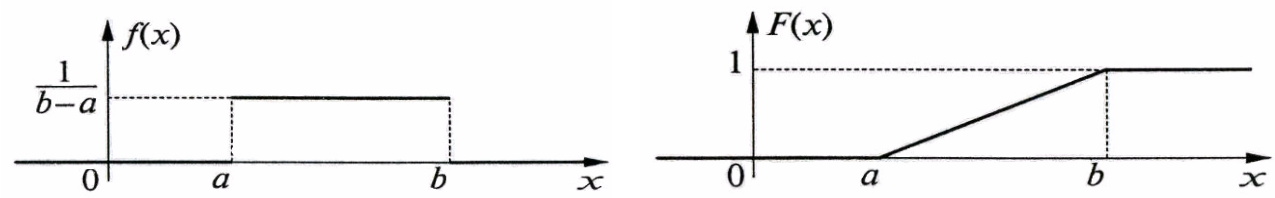


Рисунок 4

Если $X \sim R[a, b]$, то $$M(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Равномерное распределение широко используется в приложениях, особенно в связи с проблемами моделирования других распределений.

Показательный закон распределения

Непрерывная с.в. X имеет *показательное (экспоненциальное) распределение* ($X \sim E(\lambda)$), если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при\ x \geq 0, \\ 0 & при\ x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Соответствующая функция распределения записывается в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & при\ x \geq 0, \\ 0 & при\ x < 0. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены на рис. 5.

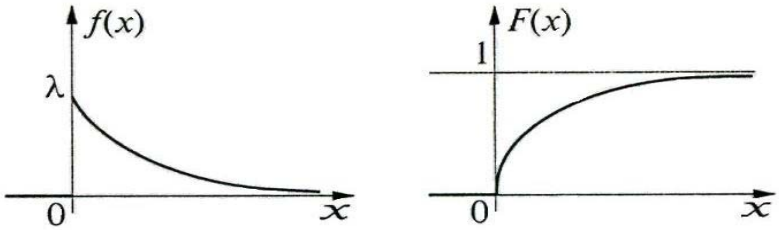


Рисунок 5

Экспоненциальным распределением часто характеризуется срок службы той или иной технической системы до отказа (выхода из строя), что обусловливает широкое применение этого распределения в теории надёжности.

Если $X \sim E(\lambda)$, то $$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность попадания данной случайной величины в интервал (a, b) равна:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

<u>Пример</u>**.** Случайная величина T – время работы радиолампы имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 200 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

<u>Решение</u>. $M(T) = 400$, значит, $\lambda = \dfrac{1}{400}$. Искомая вероятность:

$$P(T \geq 200) = 1 - P(T < 200) = 1 - F(200) = 1 - (1 - e^{-\frac{200}{400}}) = e^{-0,5} \approx 0,607.$$ <u>Ответ</u>: 0,6.

Нормальный закон распределения

Непрерывная с.в. X распределена по нормальному закону с параметрами a и $\sigma > 0$ ($X \sim N(a, \sigma^2)$), если её плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

Функция распределения: $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$.

Графики плотности вероятности *f(x)* и функции распределения *F(x)* случайной величины *X* представлены на рис.6.

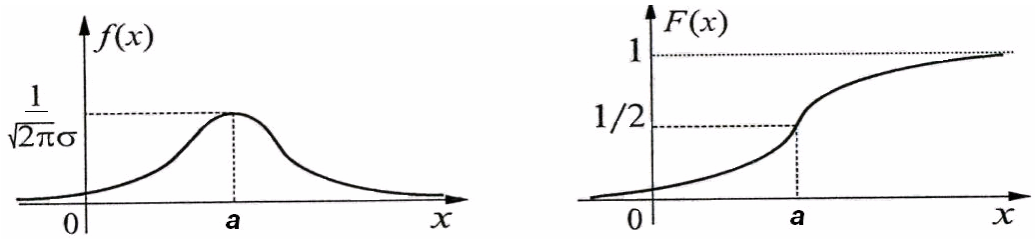


Рисунок 6

Если $X \sim N(a, \sigma^2)$, то $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Как видно по рис.6, изменение параметра a не влияет на форму кривых. Влияние параметра σ на форму кривой нормальной плотности вероятности представлено на рис. 7. Здесь изображены графики $f(x)$ при одном и том же значении a, но разных значениях σ: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

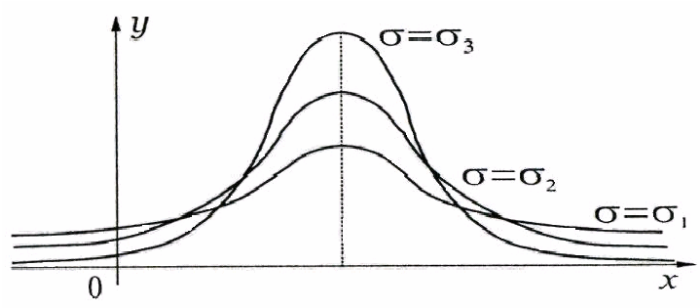


Рисунок 7

Рисунок 8 даёт представление о площадях под графиком нормальной плотности, приходящихся на промежутки *(-∞, a-3σ), (a-3σ, a-2σ),…, (a+2σ, a+3σ), (a+3σ, ∞).* Эти площади равны вероятностям попадания случайной величины *X* в соответствующий промежуток. В частности,

$$P(|X-a|<3\sigma)\approx 0{,}997\,.$$

Этот факт иногда приводят в следующем виде.

Правило трёх сигм. Нормально распределенная случайная величина с дисперсией σ^2 *практически* не отклоняется от своего среднего значения больше, чем на 3σ.

Для всякой случайной величины $X \sim N(a, \sigma^2)$ при $a < b$.

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания нормальной с.в. *X* в интервал $(a-\delta; a+\delta)$, симметричный относительно центра рассеяния *a*, вычисляется по формуле:

$$P(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

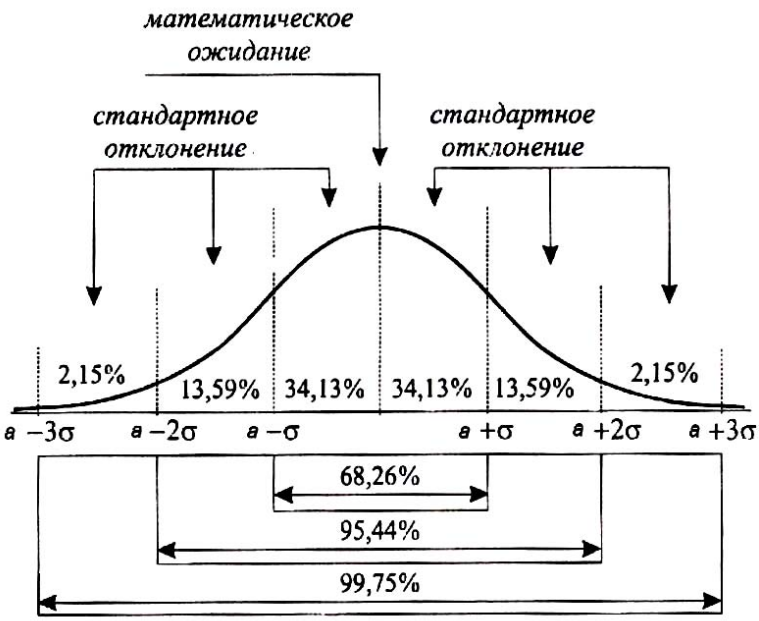


Рисунок 8

Пример. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma = 10$ мм. Производятся три независимых измерения детали. Найти вероятность того, что ошибка хотя бы одного измерения не превосходит по модулю 2 мм.

Решение. По формуле $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ находим:

$$P(|X - a| < 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{10}\right) \approx 2 \cdot 0{,}07926 = 0{,}15852.$$

Вероятность того, что эта ошибка превышает 2 мм в одном опыте, равна:

$$P(|X - a| > 2) = 1 - 0{,}15852 = 0{,}84148.$$

По теореме умножения вероятность того, что во всех трёх опытах ошибка измерения превышает 2 мм, равна $0{,}84148^3 \approx 0{,}5958$. Следовательно, искомая вероятность равна $1 - 0{,}5958 = 0{,}4042$. Ответ: 0,4.

§3. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Термин "статистика" в настоящее время употребляется в разных значениях, однако зачастую под ним понимают науку, изучающую массовые явления в целях выявления в них закономерностей и получения некоторых обобщённых показателей, кратко характеризующих полученные данные. Как правило, статистика имеет дело с числовыми значениями, которые определяются влиянием множества различных причин, одни из которых являются существенными, а другие – случайными. Основная задача статистики состоит в том, чтобы абстрагироваться от случайного и выявить типичное, характерное и закономерное.

Сам термин "статистика" произошел от латинского слова status, что означает политическое состояние и первоначально статистикой называлось изучение государственных дел, а видных политических деятелей, особенно хорошо осведомленных и потому способных делать обоснованные политические выводы, называли statists. Лишь позднее под словом "статистика" стали подразумевать числовые данные, на основе которых государственные деятели делали свои выводы, а ещё позже его стали применять и для числовых данных вообще и постепенно пришли к современному значению.

Без статистики невозможно изучение явлений и процессов, происходящих в области производства, экономики и других сторон общественной жизни. Статистическое изучение тех или иных явлений предполагает в качестве первого шага сбор сведений. Этот сбор сведений называют статистическим наблюдением. В ре-

зультате такого наблюдения получается беспорядочная груда сырого материала, нуждающегося в систематизации и обработке.

Математическая статистика разрабатывает способы сбора, группировки и анализа статистических данных, т. е. сведений, получаемых в результате наблюдения некоторой изучаемой случайной величины. При изучении случайной величины обычно имеют дело с совокупностью предметов, подлежащих обследованию относительно некоторого количественного признака X.

Совокупность объектов, подлежащих обследованию, называется *генеральной совокупностью*, число объектов в генеральной совокупности называют *объёмом генеральной совокупности*. Если обследование всей генеральной совокупности невозможно (объём её слишком велик или даже равен бесконечности, или обследование предмета связано с его уничтожением), то обследуется только часть генеральной совокупности, которая называется *выборочной совокупностью или выборкой*. Число предметов в выборке называют *объемом выборки*. Виды и способы отбора могут быть различными. Важно только, чтобы выборка хорошо представляла генеральную совокупность, т. е. была *репрезентативной* (представительной).

Значение признака X в выборочной совокупности называются *вариантами*. Пусть значение признака X равное x_1 встретилось в выборке n_1 раз, x_2 встретилось в выборке n_2 раз, … , x_k встретилось в выборке n_k раз. Числа $n_1, n_2, ..., n_k$ называются *частотами*, *объём выборки* равен:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

числа $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ – *относительными частотами*. Соответствие между вариантами и частотами или между вариантами и относительными частотами называется *вариационным рядом*. Вариационный ряд записывают обычно в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_j	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_j	…	n_k

Задачей математической статистики является оценка неизвестных параметров распределения с.в. (приближенное определение неизвестной функции распределения, оценка неизвестного математического ожидания и дисперсии, составление таблиц, графиков и других материалов, иллюстрирующих процесс, определение зависимости между двумя с.в., проверка статистических гипотез и т. д.).

Наиболее полную характеристику статистической совокупности даёт функция распределения вероятностей случайной величины. *Эмпирической функцией*

распределения (или функцией распределения выборки) называют функцию *F(x)*, определяющую для каждого значения относительную частоту события $X < x$:

$$F(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, для которых $x_i < x$, n – объём выборки.

Пример. Данные по продаже 100 пар мужской обуви в некотором магазине представлены следующим вариационным рядом:

Размер (x_i)	37	38	39	40	41	42	43
Число проданных пар (n_i)	2	8	12	25	28	17	8
Относительная частота (ω_i)	0,02	0,08	0,12	0,25	0,28	0,17	0,08

Построить эмпирическую функцию распределения.

Решение.

1. $x \le 37$, тогда $n_x = 0$, значит *F(x)=0*;
2. $37 < x \le 38$, $n_x = 2$, *F(x)*=0,02;
3. $38 < x \le 39$, $n_x = 10$, *F(x)*= 0,02+0,08=0.1;
4. $39 < x \le 40$, $n_x = 22$, *F(x)*= 0,02+0,08+0,12=0.22;
5. $40 < x \le 41$, $n_x = 47$, *F(x)*= 0,02+0,08+0,12+0,25=0.47;
6. $41 < x \le 42$, $n_x = 75$, *F(x)*= 0,02+0,08+0,12+0,25+0.47=0.75;
7. $42 < x \le 43$, $n_x = 92$, *F(x)*= 0,02+0,08+0,12+0,25+0.47+0.75=0.92;
8. $x > 43$, $n_x = 100$, *F(x)*= 0,02+0,08+0,12+0,25+0.47+0.75+0.92 = 1.

Таким образом, получим следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 37; \\ 0.02, & 37 < x \le 38; \\ 0.1, & 38 < x \le 39; \\ 0.22, & 39 < x \le 40; \\ 0.47, & 40 < x \le 41; \\ 0.75, & 41 < x \le 42; \\ 0.92, & 42 < x \le 43; \\ 1, & x > 43. \end{cases}.$$

На практике часто используют ограниченное количество числовых характеристик, называемых параметрами распределения. Эти параметры можно разде-

лить на три класса, которые характеризуют: 1) центр группирования; 2) величину рассеяния (степень вариации); 3) форму распределения вероятностей.

Центр группирования. Одной из основных характеристик статистической совокупности, дающей представление о том, вокруг какого центра группируются все значения, является среднее арифметическое.

Величина рассеяния. Статистические совокупности могут иметь близкие или даже одинаковые значения центра группирования, однако отдельные значения величин в них могут существенно отличаться. Происходит это из-за того, что разброс значений относительно центра бывает неодинаковый: в одних случаях большой, в других – малый. Поэтому необходимо количественно измерять эти разбросы или вариации. Самой элементарной характеристикой рассеяния является вариационный размах, представляющий собой разность между максимальным и минимальным значениями изучаемой совокупности. Вариационный размах не всегда характерен, так как учитывает только крайние значения, которые могут в большой степени отличаться от всех других значений. Более точно рассеяние определяется с помощью показателей, учитывающих отклонение всех значений от среднего арифметического, т. е. среднее квадратическое отклонение. Среднее квадратическое отклонение является наиболее распространенным и общепринятым показателем вариации. Среднее арифметическое из квадратов отклонений от среднего значения называется дисперсией. Дисперсия имеет самостоятельное значение во многих задачах математической статистики и относится к числу важнейших показателей вариации.

Для характеристики формы распределения обычно используют ту математическую модель, которая наилучшим образом приближает к виду кривой распределения вероятностей, полученной при анализе экспериментально полученных данных. В качестве математических моделей статистических распределений используются теоретические кривые распределения. Теоретическая кривая – это зависимость, которая описывается математически, т. е. может быть выражена уравнением с определёнными параметрами. Известно значительное количество различных распределений: число потенциально возможных статистических моделей ещё больше. Однако на практике используются лишь некоторые из них, обычно те, которые более удобны для описания какой-либо ситуации или обладают желательными математическими свойствами.

Числовые характеристики статистической совокупности. Параметры распределения

Выборочным средним называется среднее арифметическое значение признака X в выборочной совокупности:

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n}.$$

Выборочное среднее является оценкой для генерального среднего или является оценкой неизвестного математического ожидания с.в., если выборка получена в результате наблюдения над некоторой случайной величиной.

Медиана – средний член упорядоченного ряда значений. Для нахождения медианы нужно расположить все значения в порядке возрастания или убывания и найти средний по порядку член ряда. В случае n – чётного числа в середине ряда окажутся два значения, тогда медиана будет равна их полусумме.

Мода – наиболее часто встречающееся значение случайной величины.

Медиана, мода и среднее значение являются *характеристиками положения* – около них группируются измеренные значения случайной величины.

Выборочной дисперсией называется дисперсия признака X в выборочной совокупности: $$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \cdot n_i.$$

Для вычисления дисперсии также используют формулу:

$$D_B = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\overline{x}_B\right)^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Коэффициент вариации – это отношение среднеквадратичного отклонения к среднему значению: $$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B}.$$

Коэффициент вариации выражается в долях единицы или (после умножения на 100) в процентах. Вычисление коэффициента вариации имеет смысл для положительных случайных величин.

Размах – это разность между максимальным x_{max} и минимальным x_{min} значениями свойства: $$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Дисперсия, среднеквадратичное отклонение и коэффициент вариации, а также размах являются *мерами рассеяния* значений случайной величины около среднего значения. Чем они больше, тем сильнее рассеяние.

Асимметрия – степень асимметричности распределения значений случайной величины относительно среднего значения,

$$A = \frac{1}{n\sigma^3} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^3 \cdot n_i .$$

Эксцесс – степень остро- или плоско-вершинности распределения значений случайной величины относительно нормального закона распределения,

$$E = \frac{1}{n\sigma^4} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^4 \cdot n_i - 3.$$

Асимметрия и эксцесс являются безразмерными величинами. Они отражают особенности группировки значений случайной величины около среднего значения.

Рассмотренные статистические характеристики относятся к множеству значений $x_1, x_2, ..., x_n$. Если множество представляет собой выборку из генеральной совокупности, то возникает задача оценки её статистических характеристик по выборочным данным. Наибольшее значение имеют оценка математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

Математическое ожидание случайной величины $M(x)$ – это её среднее значение в генеральной совокупности (*генеральное среднее* $\bar{X}_Г$). Оно, за редким исключением, бывает неизвестно, и приходится пользоваться его приближённой оценкой (точечной оценкой) – выборочным средним значением $\bar{x}_B$, определяемым по формуле (1). При увеличении числа наблюдений выборочное среднее стремится к пределу – к математическому ожиданию.

Дисперсия генеральной совокупности $D(x)$ – это число, равное среднему квадрату отклонений случайной величины от её математического ожидания (*генеральная дисперсия*). Если математическое ожидание известно, то дисперсию находят по формуле:

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - M(x)\right)^2 \cdot n_i .$$

Если математическое ожидание неизвестно, то определяют *оценку дисперсии* по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_B\right)^2 \cdot n_i \qquad \text{или} \qquad S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B .$$

При увеличении числа наблюдений n оценка дисперсии S^2 стремится к дисперсии генеральной совокупности $D(x)$.

S^2 называется *несмещённой* или *исправленной выборочной дисперсией*.

Величина $$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B}\ .$$

называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением*.

Графическое изображение статистического распределения

Вариационные ряды приобретают большую наглядность, когда они изображаются графически в виде полигона и гистограммы.

1) Для этого в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают интервалы вариационного ряда, а по оси ординат частоты (или относительные частоты). Полученная столбиковая диаграмма, состоящая из сомкнутых прямоугольников, называется *гистограммой*.

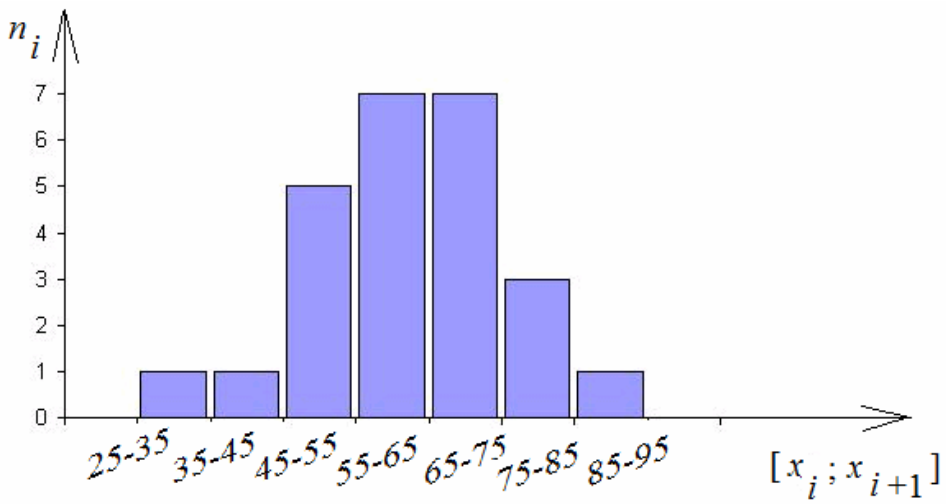
2) Ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1; n_1), (x_2; n_2), ..., (x_k; n_k)$, называется *полигоном* частот. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i.

Пример. По результатам тестирования по математике студентов некоторой группы 1-го курса получены данные о доступности заданий теста (отношение числа учащихся, правильно выполнивших задания, к числу тестировавшихся учащихся), представленные ниже, в таблице. Тест содержал 25 заданий.

Доступность задания, x_i, %	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
Количество задач, n_i	1	1	5	7	7	3	1

Построить гистограмму.

Решение. Откладываем на оси абсцисс семь отрезков длиной 10. На них, как на основаниях, строим прямоугольники, высоты которых соответственно равны 1, 1, 5, 7, 7, 3, 1. Полученная ступенчатая фигура и является искомой гистограммой.

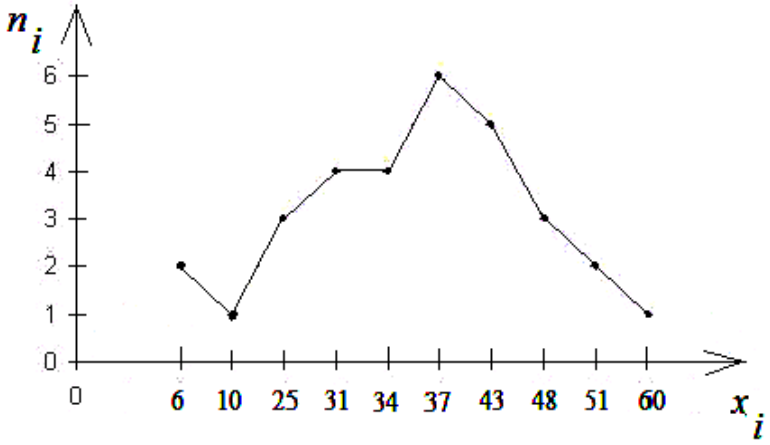


Пример. Учебные достижения студентов 1-го курса по математике за работу в семестре характеризуются данными, представленными в таблице.

Количество баллов, x_i	6	10	25	31	34	37	43	48	51	60
Число учащихся, n_i	2	1	3	4	4	6	5	3	2	1

Построить полигон частот.

Решение. Строим точки, основываясь на данных из таблицы. Полученные точки соединяем отрезками прямой. Полигон частот изображен на рисунке.



Если полигон строят по данным интервального ряда, то в качестве абсцисс точек берут середины соответствующих интервалов. Конечно, в этом случае полигон лишь приближенно отображает зависимость частот от значений аргумента.

Таблица вариантов

Вари-ант	Номера задач	Вари-ант	Номера задач	Вари-ант	Номера задач
00	1, 26, 43, 66, 90,102	**34**	8, 21, 43, 67, 97,101	**67**	7, 26, 46, 63, 90,102
01	9, 33, 54, 65, 92,103	**35**	11, 33, 52, 77, 87,104	**68**	14, 33, 53, 71, 85,105
02	10, 27, 41, 70, 82,106	**36**	10, 40, 42, 68, 86,105	**69**	20, 38, 45, 70, 93,107
03	12, 21, 55, 64, 94,104	**37**	17, 22, 51, 80, 96,108	**70**	4, 32, 48, 62, 88,109
04	14, 32, 42, 71, 81,110	**38**	20, 34, 59, 75, 100,110	**71**	15, 24, 54, 74, 86,118
05	18, 34, 56, 73, 93,109	**39**	9, 35, 41, 76, 88,111	**72**	13, 39, 57, 78, 95,101
06	11, 35, 48, 63, 83,111	**40**	11, 21, 43, 63, 85,117	**73**	8, 23, 47, 69, 92,112
07	2, 22, 44, 67, 89,112	**41**	2, 30, 48, 71, 94,113	**74**	18, 25, 55, 73, 97,114
08	13, 25, 53, 74, 91,115	**42**	10, 22, 42, 78, 86,116	**75**	5, 37, 58, 79, 94,105
09	17, 31, 45, 72, 95,116	**43**	12, 28, 53, 72, 96,117	**76**	19, 40, 49, 64, 87,118
10	6, 28, 58, 80, 88,103	**44**	18, 34, 55, 64, 87,102	**77**	12, 36, 44, 72, 96,113
11	19, 23, 47, 68, 96,108	**45**	1, 35, 54, 61, 84,119	**78**	6, 31, 56, 61, 89,120
12	20, 36, 52, 77, 87,101	**46**	17, 38, 41, 70, 95,102	**79**	3, 23, 44, 71, 83,103
13	5, 24, 57, 69, 98,120	**47**	3, 27, 45, 79, 93,115	**80**	13, 21, 47, 73, 92,104
14	8, 30, 46, 75, 84,105	**48**	19, 29, 56, 69, 88,106	**81**	15, 27, 54, 67, 93,119
15	4, 37, 51, 79, 99,107	**49**	6, 26, 46, 65, 89,108	**82**	1, 36, 43, 66, 94,114
16	15, 39, 59, 62, 97,107	**50**	13, 32, 57, 73, 83,106	**83**	12, 40, 46, 74, 84,109
17	3, 40, 49, 78, 85,110	**51**	16, 40, 44, 62, 92,111	**84**	4, 29, 42, 65, 81,112
18	7, 38, 60, 76, 100,113	**52**	4, 23, 47, 77, 82,114	**85**	2, 24, 53, 72, 95,115
19	16, 29, 50, 61, 86,116	**53**	20, 24, 50, 66, 97,117	**86**	11, 22, 59, 75, 82,118
20	3, 29, 44, 63, 81,119	**54**	5, 37, 58, 74, 98,120	**87**	5, 28, 41, 69, 85,101
21	6, 23, 53, 69, 85,102	**55**	14, 39, 59, 68, 99,103	**88**	6, 25, 45, 70, 86,104

Вари-ант	Номера задач	Вари-ант	Номера задач	Вари-ант	Номера задач
22	12, 28, 60, 64, 93,105	**56**	7, 31, 51, 76, 91,106	**89**	10, 35, 51, 68, 90,107
23	13, 36, 57, 73, 94,108	**57**	9, 36, 60, 80, 100,109	**90**	8, 30, 52, 63, 99,110
24	5, 24, 45, 72, 92,111	**58**	15, 33, 52, 75, 90,112	**91**	14, 26, 50, 76, 97,113
25	1, 32, 49, 78, 82,114	**59**	8, 25, 49, 67, 81,115	**92**	16, 34, 55, 62, 91,116
26	16, 26, 48,74, 91,117	**60**	1, 27, 43, 67, 99,118	**93**	7, 32, 58, 77, 96,119
27	2, 38, 46, 65, 84,120	**61**	9, 34, 50, 76, 81,101	**94**	9, 37, 49, 64, 88,102
28	18, 31, 54, 70, 83,103	**62**	3, 29, 52, 68, 91,103	**95**	17, 33, 56, 80, 100,104
29	15, 37, 56, 79, 90,105	**63**	10, 22, 51, 65, 83,106	**96**	19, 39, 60, 78, 87,107
30	19, 27, 55, 61, 95,108	**64**	2, 28, 59, 75, 82,109	**97**	18, 38, 57, 61, 98,110
31	7, 25, 47, 66, 98,111	**65**	16, 21, 41, 66, 100,112	**98**	20, 31, 48, 79, 89,113
32	14, 39, 58, 62, 89,114	**66**	17, 35, 60, 80, 84,115	**99**	11, 30, 42, 77, 98,116
33	4, 30, 50, 71, 99,116				

Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2008.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М. : Юрайт: Высш. образование, 2009.
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., перераб. – М. : Высшее образование, 2010.

Задания

1–20. Решить задачу

1. Вероятности попадания при каждом выстреле для трёх стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трёх стрелков имелось два попадания. Найти вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

2. Устройство содержит три независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов равны соответственно 0.01, 0.04 и 0.08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал один элемент.

3. Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает три вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.

4. В колоде 36 карт. Вынимаются по 1 карте без возвращения. Найти вероятность того, что последовательно будут вынуты бубновая, пиковая карта и шестёрка треф.

5. В урне 6 синих, 2 красных и 2 зелёных кубика. Найти вероятность того, что среди трёх извлечённых наудачу кубиков окажется два синих и один красный.

6. В трёх ящиках находится по 10 деталей, из них в первом 6 стандартных, во втором 8 стандартных, в третьем 9 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что из этих трёх деталей не менее двух стандартных.

7. В коробке лежат 18 деталей, из них 9 окрашенных и 9 неокрашенных. Найти вероятность того, что среди пяти извлечённых наудачу деталей оказалось не менее четырёх окрашенных.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наудачу выбирается одна, а потом из оставшихся четырёх другая цифра. Найти вероятность того, что обе выбранные цифры нечётные.

9. Цифры 0,1,2,3 написаны на четырёх карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?

10. В ящике разложено 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет 3 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?

11. Из 7 карточек разрезной азбуки составлено слово *колокол*. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово *колокол*?

12. Для того чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее 2 бомб. Сбросили 3 бомбы с вероятностями попадания 0.1, 0.3, 0.4. Найти вероятность разрушения моста.

13. Имеется урна, в которой 3 белых и 6 чёрных шаров. Определить вероятность того, что при выборе из урны двух шаров они окажутся разных цветов.

14. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность того, что все эти команды попадут в одну и ту же группу.

15. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число. Найти вероятность того, что оно будет четным.

16. Батарея из трёх орудий произвела залп, причём 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями равны соответственно 0,4, 0,3 и 0,5.

17. Из колоды в 52 карты выбираются случайным образом без возвращения 2 карты. Найти вероятность того, что будут выбраны карты разных значений.

18. Из последовательности чисел 1, 2, 3, …, 50 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше 17, а другое больше 17?

19. Имеется пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Найти вероятность того, что два из них имеют одинаковую стоимость.

20. В барабане револьвера 7 гнёзд, из них в 5 заложены патроны, а 2 оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается 1 из гнёзд. После этого нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт 2 раза подряд, мы оба раза выстрелим.

21–40. Решить задачу

21. 3 экзаменатора принимают экзамен по некоторому предмету у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй – 3 студентов, а третий – 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трёх экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго – только 10%, у третьего – 70%. Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен.

22. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 и 0.9.

а) Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берёт одно из ружей наудачу.

б) Произведённый выстрел оказался успешным. Найти вероятность того, что выстрел был сделан из четвёртого ружья.

23. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 50% общего объёма поставок, B – 30% и C – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой A деталей 10% бракованных, фирмой B – 5% и фирмой C – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

24. Имеются две урны. В первой 7 красных и 8 синих шаров, во второй – 5 красных и 10 синих. Из наудачу взятой урны наудачу вынимают шар. Какова вероятность того, что он красный?

25. Третья часть одной из трёх партий деталей является второсортной, остальные детали во всех партиях первого сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали.

26. Три оператора радиолокационной установки проводят соответственно 25%, 35% и 40% всех измерений, допуская при этом 5%, 4% и 2% ошибок соответственно. Случайно выбранное измерение оказалось ошибочным. Найти вероятность того, что оно было выполнено третьим оператором.

27. Приборы одного наименования изготавливаются двумя заводами. Первый завод изготавливает 2/3 всех приборов, второй – 1/3. На первом заводе 3% брака, на втором – 4%. Найти вероятность того, что приобретённый вами прибор исправен.

28. В группе 5 студентов выучили все 40 экзаменационных вопросов, 6 человек – 35 из 40, а 10 человек только 25 вопросов. Какова вероятность того, что наудачу вызванный студент ответит на один вопрос билета.

29. Компьютеры одной марки производят 2 предприятия. Первое предприятие выпускает 3/4 всех компьютеров, второе – 1/4. На первом предприятии 1% брака, на втором – 2%. Найти вероятность того, что купленный вами исправный компьютер произведён на втором предприятии.

30. На трёх станках изготовляют детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0.7, если она изготовлена на первом станке, 0.8 – если на втором и 0.9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

31. Прибор может работать в 2 режимах: нормальном и аварийном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора, аварийный – в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в аварийном – 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

32. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

33. Для контроля продукции из 3 партий деталей взята для испытания 1 деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

34. Характеристика материала, из которого изготовлена продукция, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

35. Имеется 5 урн следующего состава: две урны состава A_1 – по 1 белому и 4 чёрных шара; одна урна состава A_2 – 2 белых и 3 чёрных шара; две урны состава A_3 – по 3 белых и 2 чёрных шара. Из одной наудачу выбранной урны взят шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар был вынут из урны третьего состава.

36. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную – с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощённый контроль, удовлетворяет стандарту.

37. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 65% из первого и 35% – со второго. При этом материал первого цеха имеет 15% брака, а второго – 25%. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка без дефектов.

38. Имеется 10 одинаковых по виду урн, из которых в 9 находится по два чёрных и два белых шара, а в одной – пять белых и один чёрный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что он извлечён из урны, содержащей пять белых шаров?

39. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8, 7 – с вероятностью 0,7, 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвёл выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

40. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества (из высококачественных деталей собирается 30% приборов). Вероятность безотказной работы за время t для приборов первого и второго типа равна соответственно 0,96 и 0,71. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

41-60. Решить задачу

41. Найти вероятность того, что при 1000 бросаниях игральной кости шесть очков выпадают: а) семьсот раз; б) не менее 200 и не более 570 раз.

42. Игральную кость бросают шесть раз. Найти вероятность того, что число кратное двум появится: а) два раза, б) не более трёх раз.

43. Два студента играют в шахматы. Вероятность выигрыша первого студента 0,4. Найти вероятность того, что он: а) выиграет 3 партии из 6-ти, б) выиграет 7 партий из 10.

44. Найти вероятность того, что при 700 бросаниях монеты “герб” выпадет: а) ровно 180 раз; б) не менее 150 и не более 210 раз.

45. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролёр проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно 3 бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше 3-х бракованных деталей?

46. В семье 6 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) 4 мальчика, б) 4 девочки, если вероятность рождения мальчика равна 0.51.

47. Найти вероятность того, что при 600 бросаниях игральной кости одно очко выпадет: а) ровно 100 раз; б) более 120 раз.

48. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0.4. Найти вероятность того, что в 400 испытаниях событие наступит а) ровно 150 раз; б) не менее 140 и не более 220 раз.

49. В партии из 800 изделий имеются 32 дефектных. Найти вероятность того, что среди 100 наудачу отобранных изделий: а) ровно 5 дефектных; б) не более 5 дефектных.

50. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

51. 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Некто приобрёл 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность, что а) 3 из них высшего сорта; б) не менее 4 изделий высшего сорта?

52. Среди коконов некоторых партии 20% цветных. Какова вероятность того, что среди 100 случайно отобранных из партии коконов 15 цветных? Не более 30 и не менее 15 цветных?

53. Имеется 5 студенческих групп по 25 человек, в каждой из которых по 5 отличников. Из каждой группы выбирается случайным образом по одному студенту. Найти вероятность того, что среди выбранных студентов будет 3 отличника.

54. Машинистка печатает текст, который содержит 20000 знаков. Каждый знак может быть напечатан неправильно с вероятностью 0.0004. Какова вероятность того, что в тексте не более 3 опечаток?

55. При рождении ребенка вероятность рождения мальчика равна 0.512. Найти вероятность того, что среди 1000 новорождённых мальчиков родится больше, чем девочек.

56. Среди семян пшеницы 0.6% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 обнаружить: а) не менее 3 семян сорняков; б) не более 16 семян сорняков; в) ровно 6 семян сорняков?

57. В первые классы должны быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

58. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включённым в течение 0.8 рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольный момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

59. На автобазе имеется 8 машин. Вероятность выхода на линию каждой из них равна 0,8. Какова вероятность нормальной работы автобазы, если для этого необходимо иметь на линии не менее 6 машин?

60. Рабочий обслуживает 10 станков одного типа. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) в течение часа 4 станка потребуют внимания рабочего; б) не более 4-х станков потребуют внимания рабочего в течение часа.

61–80. Известен закон распределения дискретной случайной величины X. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. Записать функцию распределения $F(x)$, построить её график и полигон распределения.

61.

X	2	6	10	14
P	0,3	p_2	0,1	0,4

62.

X	5	8	15	16
P	0,6	0,2	0,1	p_4

63.

X	1	3	5	7
P	p_1	0,2	0,6	0,1

64.

X	-2	-1	3	5
P	0,2	0,4	p_3	0,1

65.

X	12	14	16	18
P	0,2	0,5	0,2	p_4

66.

X	-2	-1	0	3
P	p_1	0,4	0,3	0,1

67.

X	-3	-1	1	3
P	0,1	0,4	p_3	0,2

68.

X	6	9	13	14
P	0,2	p_2	0,4	0,1

69.

X	20	22	24	26
P	0,3	0,2	0,1	p_4

70.

X	2	6	10	14
P	p_1	0,5	0,3	0,1

71.

X	-2	-1	0	4
P	0,1	p_2	0,3	0,1

72.

X	1	2	5	8
P	0,05	0,45	p_3	0,4

73.

X	2	4	5	6
P	p_1	0,35	0,5	0,1

74.

X	11	13	15	17
P	0,1	p_2	0,25	0,05

75.

X	22	24	26	28
P	0,25	0,45	p_3	0,1

76.

X	-2	-1	3	5
P	0,2	0,4	0,35	p_4

77.

X	-2	-1	0	3
P	p_1	0,4	0,35	0,2

78.

X	-3	-1	1	3
P	0,15	p_2	0,2	0,25

79.

X	4	6	10	11
P	0,25	0,3	p_3	0,2

80.

X	2	6	10	14
P	0,1	0,6	0,25	p_4

81-100. Задана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X, числа a и b. Найти неизвестные параметры A и B, функцию плотности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, $P(a<x<b)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

№	$F(x)$	a	b
81.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Ax^3+B, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$	1	10
82.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2Ax^3-B, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$	2	10
83.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ Ax^2+B, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$	3	10
84.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\\ 4Ax^2-B, & 3<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$	4	7
85.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ -Ax^2+B, & 1<x\le 5\\ 1, & x>3\end{cases}$	2	6
86.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ASinx+B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	0	π
87.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ACosx+B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
88.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ASin(x/2)+B, & 0<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
89.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2ACosx-B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
90.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ACos(x/2)+B, & 0<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$	π

91.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 3Ax^3-B, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$	3	11
92.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2Ax-B, & 0<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$	2	8
93.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ Ax^2-2B, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$	3	9
94.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4\\ 4Ax^2-B, & 4<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$	5	13
95.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ -Ax+3B, & 2<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$	2,5	6
96.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ASinx-B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	2π
97.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ ACosx-2B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
98.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 3ASin(x/2)+B, & 0<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
99.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2ACosx+3B, & 0<x\le \pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$
100.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 3ACos(x/2)-B, & 0<x\le \pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$

101–120. Известны X_1, X_2, … X_n – результаты независимых наблюдений над случайной величиной X.

1. Сгруппировать эти данные в интервальную таблицу.
2. Построить гистограмму, полигон частот и эмпирическую функцию распределения.
3. Найти и построить моду и медиану.
4. Найти несмещённую оценку математического ожидания и дисперсии случайной величины X.
5. Найти интервальные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X с надёжностью γ=0,99 и γ=0,95.

101.

18.0	26.0	9.0	5.0	7.0	40.0	23.0	15.0	4.0	8.0
15.0	27.0	15.0	29.0	25.0	19.0	2.0	5.0	35.0	6.0
24.0	30.0	5.0	15.0	55.0	17.0	1.0	22.0	71.0	20.0
3.0	8.0	3.0	9.0	11.0	2.0	22.0	33.0	13.0	18.0
23.0	37.0	7.0	3.3	13.0	4.0	14.0	9.0	10.0	13.0
7.0	21.0	21.0	8.0	9.0	7.0	16.0	3.0	22.0	13.0
31.0	13.0	2.0	9,0	11.0	3.5	35.0	30.0	2,0	5.0
1.0	29.0	13.0	12.0	1.0	2.0	5.0	5.0	21.0	19.0
9.0	10.0	6.0	9.0	31.0					

102.

145.0	152.1	40.0	42.0	102.0	106.0	125.7	18.0	1.0	21.6
233.0	16.0	79.0	6.0	21.0	146.0	9.4	37.0	36.0	11.0
90.0	106.0	27.0	2.0	85.0	27.0	25.0	61.0	56.0	32.0.
24.0	128.0	170.0	25.0	34.0	32.0	43.0	42.0	22.0	101. 0
40.0	20.0	21.0	23.0	33.0	54.0	22.0	72.7	19.0	21.0
1.2	36.0	27.0	65.0	32.0	160.2	18.0	15.0	52.0	45.0
75.3	33.0	16.0	161.4	17.0	25.0	31.0	13.0	329.7	21.0

19.0	57.4	11.0	14.0	100.0	114.0	70.9	9.0	24.0	16.0
16.0	17.0	11.0	22.0	34.0	23.0	16.0	61.0	76.0	70.0
56.0	57.0	53.0	82.0	93.0	100.0	51.0	121.5	116.4	20.5
7.4	2.0	6.1	141.0						

103.

161	146	120	131	128	177	230	148	126	156
165	150	198	216	154	156	170	120	127	108
171	178	182	173	158	114	100	196	158	150
173	190	119	124	200	158	148	137	127	163
179	135	159	146	170	148	160	192	170	139
148	149	131	137	203	170	169	176	136	150
126	209	196	218	156	139	137	116	198	193
160	147	124	157	157	153	168	168	152	184
194	184	165	183	185	185	147	182	212	162
143	147								

104.

133	144	145.5	143	135	143	135.5	133.5	141	141.5
143.5	143.5	138.5	135	142	140.5	141.5	139.5	136.5	142.5
135	134.5	144	140.5	139.5	140.5	136	145.5	145.5	138.5
139.5	143.5	139	137	144.5	136.5	139	135	139	140
138	145.5	139.5	141.5	141	138	139	138.5	134	137
143.5	140	139	137	137	134.5	140	140.5	138.5	138
138.5	145	139	145	144	136.5	139.5	140	140.5	139
139.5	140.5	140	139.5	140.5	137	137.5	141	140.5	141
142	142.5	143	143.5	144	142.5	141	147	146.5	146
139.5	140	138.5	138	142	142	142	140.5		

105.

158.7	124.5	173.3	188.9	104.8	128.9	202.3	128.5	110.8	206.9
179.4	123.7	106.6	105.1	111.3	119	110. 3	178.7	116.7	119.8
101.6	183.6	112.6	114.0	110.5	110.5	171. 4	112.2	117.5	140.0
111	110	122.9	205.3	201.3	98.3	175	191.3	97.9	98.9
117.3	107.9	164.2	177.6	202	112.2	110.3	109.7	113.3	114.9
129	106	120	109.8	165.3	113.6	163	138.9	119	94.5
178.9	109.6	173.1	122.8	121	113.1	127.2	186	128	140.9
126	124.1	136	127	121	137	125	172	199	133.5
178.9	109.6	173.1	122	167	204	103	112	122	182
134	119	130	122	125	132				

106.

161.7	177	206.7	205.9	132	119.1	108.7	135	119.1	213.9
182.8	201	204.7	171.1	127.3	126.7	120.5	125.2	210.1	121.7
133.8	207.4	129.3	119	139.1	107.4	130.6	170.3	147	116
119	126.5	116.8	121.2	131.5	183	201.4	106.2	129.7	170
196.8	170.5	188.9	206.2	120.4	115.9	122.1	208.3	128.4	139
115	123	185.8	138	123.2	148	144	123	108	120
117.8	115	128.7	134	117.3	206.3	125.4	126.7	124.4	147.3
134.8	146.5	201	145	177	134	149	149.6	141	144
136	204	197	206	123	131	155.7	135	149.3	153
199	143	177	141	152	151	146	132	134	144

107.

7.0	18.0	26.0	9.0	5.0	40.0	23.0	15.0	4.0	8.0
25.0	15.0	27.0	15.0	29.0	19.0	2.0	5.0	35.0	6.0
9.0	7.0	21.0	21.0	8.0	7.0	16.0	3.0	22.0	13.0

11.0	31.0	13.0	2.0	9.0	3.5	35.0	30.0	2.0	5.0
1.0	1.0	29.0	13.0	12.0	2.0	5.0	5.0	21.0	19.0
55.0	24.0	30.0	5.0	15.0	17.0	1.0	22.0	71.0	20.0
11.0	3.0	8.0	3.0	9.0	2.0	22.0	33.0	13.0	18.0
13.0	23.0	37.0	7.0	3.3	4.0	14.0	9.0	10.0	13.0
31.0	9.0	10.0	6.0	9.0					

108.

102.0	106.0	145.0	152.1	40.0	42.0	125.7	18.0	1.0	21.6
34.0	32.0	24.0	128.0	170.0	25.0	43.0	42.0	22.0	101.0
33.0	54.0	40.0	20.0	21.0	23.0	22.0	72.7	19.0	21.0
21.0	146.0	233.0	16.0	79.0	85.0	27.0	90.0	106.0	6.0
27.0	2.0	25.0	61.0	56.0	32.0	160.2	1.2	36.0	32.0
27.0	65.0	18.0	15.0	52.0	75.3	33.0	16.0	161.4	45.0
17.0	25.0	31.0	13.0	329.7	19.0	57.4	11.0	14.0	21.0
100.0	114.0	70.9	9.0	24.0	16.0	17.0	11.0	22.0	16.0
34.0	23.0	16.0	61.0	76.0	56.0	57.0	53.0	82.0	70.0
93.0	100.0	51.0	121.5	116.4	7.4	2.0	6.1	141.0	20.5
9.4	37.0	36.0	11.0						

109.

31.0	8.0	38.0	133.0	17.0	27.0	33.0	30.0	146.0	163.0
107.0	10.0	28.0	13.0	131.0	63.0	34.0	2.0	11.0	17.0
178.0	11.0	168.0	3.0	12.0	119.0	19.0	12.0	126.0	32.0
179.0	56.0	26.0	82.0	7.0	14.0	73.0	172.0	11.0	166.0
37.0	29.0	39.0	20.0	154.0	10.0	4.0	80.0	59.0	30.0
25.0	37.0	76.0	46.0	25.00	18.0	64.0	26.0	45.0	26.0
15.0	19.0	99.0	5.0	70.0	12.0	8.0	28.0	57.0	136.6

56.0	31.0	101.0	12.0	16.0	94.0				

110.

0.40	1.11	0.78	0.52	0.60	0.50	0.89	1.13	1.04	0.24
0.50	0.54	1.28	0.80	0.59	1.00	0.76	0.71	0.80	0.61
1.09	0.76	0.55	1.00	2.34	0.47	1.13	0.80	1.13	2.42
1.12	0.64	2.63	1.30	0.69	0.77	1.61	0.85	0.67	0.56
0.74	0.59	0.55	0.43	1.47	0.84	0.68	0.40	0.62	0.61
1.01	0.66	0.82	0.41	1.05	0.38	1.23	1.12	0.70	0.62
0.80	0.76	1.38	0.88	0.59	0.70	1.34	0.42	1.36	0.67
1.09	0.62	0.86	0.86	2.00	0.46	0.59	0.91	1.27	1.24
1.84	1.66	0.86	0.85	0.62	1.52				

111.

61.0	57.8	52.6	51.0	58.5	66.1	47.2	46.0	52.0	59.5
51.3	51.8	46.9	67.0	64.5	55.3	47.0	53.0	60.5	62.0
46.2	48.0	54.0	68.0	42.0	42.0	41.5	41.0	40.5	40.3
52.5	49.0	48.5	63.2	56.0	63.0	44.0	56.8	64.2	60.0
49.0	45.8	57.8	61.7	52.5	48.8	65.2	60.6	60.0	52.0
42.0	42.0	42.0	42.0	53.0	51.6	61.5	57.0	66.1	52.0
48.2	44.0	47.5	51.2	51.1	51.0	50.4	50.0	47.8	45.0
49.2	46.8	48.0	48.0	47.0	46.0	45.0	45.0	51.0	50.5
50.0	50.0	50.0	50.0	48.0	46.0	44.0	42.0	42.0	42.0
55.0	62.3	52.0	51.5	46.0	46.7	49.5	46.3	45.2	55.8

112.

175	126	200	160	160	174	176	144	196	178
165	179	180	146	184	137	133	148	172	133

195	160	166	186	149	150	125	193	170	179
156	139	126	218	209	196	137	116	198	193
190	178	120	114	109	122	124	180	158	140
179	160	118	100	198	155	182	158	130	140
127	165	124	210	144	164	160	142	124	146
139	125	115	160	148	121	228	194	150	188
130	152	175	152	122	163	210	160	187	212
205	160	169	134						

113.

128	177	161	131	146	120	230	148	126	156
154	156	165	216	150	198	170	120	127	108
158	114	171	173	178	182	100	196	158	150
195	160	166	186	149	150	125	193	170	179
147	124	157	160	157	153	168	168	152	184
200	158	173	124	190	119	148	137	127	163
170	148	179	146	185	159	160	192	170	139
203	170	148	137	149	131	169	176	136	150
184	165	183	194	185	185	147	182	212	162
147	143								

114.

158.7	124.5	173.3	188.9	104.8	128.9	202.3	128.5	110.8	206.9
179.4	123.7	106.6	105.1	111.3	119	110.3	178.7	116.7	119.8
101.6	183.6	112.6	114.0	110.5	110.5	171.4	112.2	117.5	140.0
111	110	122.9	205.3	201.3	98.3	175	191. 3	97.9	98.9
117.3	107.9	164.2	177.6	202	112.2	110.3	109.7	113.3	114.9
129	106	120	109.8	165.3	113.6	163	138.9	119	94.5

178.9	109.6	173.1	122.8	121	113.1	127.2	186	128	140.9
126	124.1	136	127	121	137	125	172	199	133.5
178.9	109.6	173.1	122	167	204	103	112	122	182
134	119	130	122	125	132				

115.

161.7	177	206.7	205.9	132	119.1	108.7	135	119.1	213.9
182.8	201	204.7	171.1	127.3	126.7	120.5	125.2	210.1	121.7
133.8	207.4	129.3	119	139.1	107.4	130.6	170.3	147	116
119	126.5	116.8	121. 2	131.5	183	201.4	106.2	129.7	170
196.8	170.5	188.9	206.2	120.4	115.9	122.1	208.3	128.4	139
115	123	185.8	138	123.2	148	144	123	108	120
117.8	115	128.7	134	117.3	206.3	125.4	126.7	124.4	147.3
134.8	146.5	201	145	177	134	149	149.6	141	144
136	204	197	206	123	131	155.7	135	149.3	153
199	143	177	141	152	151	146	132	134	144

116.

23.0	18.0	26.0	5.0	7.0	9.0	4.0	40.0	15.0	8.0
2.0	15.0	27.0	29.0	25.0	15.0	35.0	19.0	5.0	6.0
1.0	24.0	30.0	15.0	55.0	5.0	71.0	17.0	22.0	20.0
22.0	3.0	8.0	9.0	11.0	3.0	13.0	2.0	33.0	18.0
14.0	23.0	37.0	3.3	13.0	7.0	10.0	4.0	9.0	13.0
16.0	7.0	21.0	8.0	9.0	21.0	22.0	7.0	3.0	13.0
35.0	31.0	13.0	9,0	11.0	2.0	2,0	3.5	30.0	5.0
5.0	1.0	29.0	12.0	1.0	13.0	21.0	2.0	5.0	19.0
	9.0	10.0	9.0	31.0	6.0				

117.

143	135	143	145.5	135.5	133.5	144	141	133	141.5
135	142	140.5	138.5	141.5	139.5	143.5	136.5	143.5	142.5
140.5	139.5	140.5	144	136	145.5	134.5	145.5	135	138.5
137	144.5	136.5	139	139	135	143.5	139	139.5	140
141.5	141	138	139.5	139	138.5	145.5	134	138	137
137	137	134.5	139	140	140.5	140	138.5	143.5	138
145	144	136.5	139	139.5	140	145	140.5	138.5	139
139.5	140.5	137	140	137.5	141	140.5	140.5	139.5	141
143.5	144	142.5	143	141	147	142.5	146.5	142	146
138	142	142	138.5	142	140.5	140		139.5	

118.

124.5	173.3	104.8	206.9	158.7	128.9	202.3	128.5	188.9	110.8
123.7	106.6	111.3	119.8	179.4	119	110. 3	178.7	105.1	116.7
183.6	112.6	110.5	140.0	101.6	110.5	171. 4	112.2	114.0	117.5
110	122.9	201.3	98.9	111	98.3	175	191.3	205.3	97.9
107.9	164.2	202	114.9	117.3	112.2	110.3	109.7	177.6	113.3
106	120	165.3	94.5	129	113.6	163	138.9	109.8	119
109.6	173.1	121	140.9	178.9	113.1	127.2	186	122.8	128
124.1	136	121	133.5	126	137	125	172	127	199
109.6	173.1	167	182	178.9	204	103	112	122	122
119	130	125		134	132			122	

119.

1.11	0.52	0.60	0.50	0.89	1.13	0.78	1.04	0.40	0.24
0.54	0.80	0.59	1.00	0.76	0.71	1.28	0.80	0.50	0.61
0.76	1.00	2.34	0.47	1.13	0.80	0.55	1.13	1.09	2.42

0.64	1.30	0.69	0.77	1.61	0.85	2.63	0.67	1.12	0.56
0.59	0.43	1.47	0.84	0.68	0.40	0.55	0.62	0.74	0.61
0.66	0.41	1.05	0.38	1.23	1.12	0.82	0.70	1.01	0.62
0.76	0.88	0.59	0.70	1.34	0.42	1.38	1.36	0.80	0.67
0.62	0.86	2.00	0.46	0.59	0.91	0.86	1.27	1.09	1.24
1.66	0.85	0.62	1.52			0.86		1.84	

120.

57.8	51.0	66.1	61.0	47.2	58.5	46.0	52.0	52.6	59.5
51.8	67.0	55.3	51.3	47.0	64.5	53.0	60.5	46.9	62.0
48.0	68.0	42.0	46.2	41.5	42.0	41.0	40.5	54.0	40.3
49.0	63.2	63.0	52.5	44.0	56.0	56.8	64.2	48.5	60.0
45.8	61.7	48.8	49.0	65.2	52.5	60.6	60.0	57.8	52.0
42.0	42.0	51.6	42.0	61.5	53.0	57.0	66.1	42.0	52.0
44.0	51.2	51.0	48.2	50.4	51.1	50.0	47.8	47.5	45.0
46.8	48.0	46.0	49.2	45.0	47.0	45.0	51.0	48.0	50.5
50.0	50.0	46.0	50.0	44.0	48.0	42.0	42.0	50.0	42.0
62.3	51.5	46.7	55.0	49.5	46.0	46.3	45.2	52.0	55.8