

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Бугултминский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»
(БФ ФГБОУ ВО «КНИТУ»)

БФ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

Разработчик - Кафедра «Технологические машины и оборудование»

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
по дисциплине (модулю)
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
(наименование дисциплины (модуля))
15.03.02 Технологические машины и оборудование
(код и наименование направления подготовки/ специальности)
Оборудование нефтегазопереработки
(наименование профиля/программы/направленности/специализации)
бакалавр
квалификация

Бугульма, 2025

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 (СЕМЕТР 2)

Задание №1. Неопределенный интеграл

Условие задания: Найдите неопределенный интеграл от заданной функции. Для решения используйте один из двух основных методов: метод замены переменной (подстановки) или метод интегрирования по частям. В ответе обязательно укажите произвольную постоянную C .

№ 1: $\int x \cdot \cos(x^2) dx$

№ 2: $\int x \cdot e^x dx$

№ 3: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

№ 4: $\int (2x + 1) \cdot \sin x dx$

№ 5: $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx$

№ 6: $\int x^2 \cdot \ln x dx$

№ 7: $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

№ 8: $\int (x - 3) \cdot e^{2x} dx$

№ 9: $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

№ 10: $\int \operatorname{arctg} x dx$

№ 11: $\int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx$

№ 12: $\int x \cdot \sin(3x) dx$

№ 13: $\int \sqrt{2x + 5} dx$

№ 14: $\int \ln(x + 1) dx$

№ 15: $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

№ 16: $\int (2x - 5) \cdot \cos x dx$

№ 17: $\int x \cdot \sqrt{x^2 - 1} dx$

№ 18: $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ (подсказка: умножьте числитель и знаменатель на e^{-x})

№ 19: $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

№ 20: $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

Методические рекомендации

1. **Что такое интеграл:** Представьте, что интеграл — это поиск "родительской" функции. Если мы возьмем производную от вашего ответа, мы должны получить ту функцию, которая стояла под знаком интеграла.
2. **Метод замены переменной:** Используйте его, если видите в примере функцию и её производную "в одном флаконе". Например, в №е 3 есть $\ln x$ и его производная $1/x$. Обозначьте сложную часть буквой t , найдите её производную dt и перепишите интеграл через новую букву.
3. **Интегрирование по частям:** Используйте формулу $\int u \, dv = uv - \int v \, du$. Этот метод хорош, когда под интегралом умножаются разные "типы" функций (например, x и $\sin x$, или x и $\ln x$).
 - *Совет:* За u обычно берут многочлен (x, x^2), а за dv — тригонометрию или экспоненту. Исключение — логарифмы и арктангенсы, их всегда берем за u .
4. **Важная деталь:** В конце каждого решения обязательно пишете $+C$. Это "хвостик", который показывает, что производная любого числа равна нулю, и мы не знаем точно, какое число там могло быть.

Критерии оценки задания

- **Выбор метода:** Студент правильно определил, какой способ (замена или части) лучше подходит для данного примера.
- **Техника дифференцирования:** Правильно найдены дифференциалы dt при замене или du и v при интегрировании по частям.
- **Вычисление эталонного интеграла:** Верное использование таблицы интегралов для получения финального выражения.
- **Возврат к переменной:** Если делалась замена, в ответе произведен обратный переход от t к x .
- **Наличие константы:** В итоговом ответе присутствует символ $+C$.

Задание №2. Определенный интеграл и его приложения

Условие задания: Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями. Для решения задачи:

1. Найдите точки пересечения заданных линий (пределы интегрирования).
2. Постройте схематичный чертеж фигуры.
3. Составьте определенный интеграл и вычислите его по формуле Ньютона-Лейбница.

№ 1: $y = x^2, \quad y = x + 2$

№ 2: $y = x^2, \quad y = 4x - 3$

№ 3: $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi$

№ 4: $y = \sqrt{x}, \quad y = x$

№ 5: $y = x^2 + 1, \quad y = 2x + 1$

№ 6: $y = x^3, \quad y = x$ (в I четверти)

№ 7: $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

№ 8: $y = e^x, \quad y = 1, \quad x = 2$

№ 9: $y = x^2, \quad y = 2 - x^2$

№ 10: $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = e$

№ 11: $y = x^2 - 2x, \quad y = 3$

№ 12: $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/2, \quad x = \pi/2$

№ 13: $y = x^2, \quad y = x^3$

№ 14: $y = 2x - x^2, \quad y = 0$

№ 15: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

№ 16: $y = x^2 - 4, \quad y = x - 2$

№ 17: $y = x^2 - 1, \quad y = 0$ (вычислить модуль площади)

№ 18: $y = x^2, \quad y = 8 - x^2$

№ 19: $y = 3x - x^2$, $y = x$

№ 20: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$

Методические рекомендации

1. **Поиск пределов:** Приравняйте функции друг к другу ($y_1 = y_2$), чтобы найти x -координаты точек их пересечения. Это будут ваши нижний (a) и верхний (b) пределы интеграла.
2. **Чертеж:** Рисунок поможет вам понять, какой график находится "сверху", а какой "снизу". Это критически важно для правильного составления разности функций.
3. **Формула площади:** Площадь вычисляется как интеграл от разности:
$$S = \int_a^b (f_{\text{верхн}}(x) - f_{\text{нижн}}(x)) dx$$
4. **Формула Ньютона-Лейбница:** Сначала найдите первообразную $F(x)$, а затем подставьте в неё пределы: $F(b) - F(a)$.
 - *Внимание:* Площадь всегда должна быть положительным числом! Если у вас получился минус — проверьте, не перепутали ли вы верхнюю и нижнюю функции.

Критерии оценки задания

- **Нахождение пределов:** Правильное решение уравнения для поиска точек пересечения графиков.
- **Графическое представление:** Наличие чертежа, верно отображающего взаимное расположение линий.
- **Составление интеграла:** Корректная запись подынтегральной функции (правильный порядок вычитания).
- **Вычислительный навык:** Безошибочное применение формулы Ньютона-Лейбница и расчет итогового значения.
- **Логика и ответ:** Получение положительного значения площади с указанием единиц измерения (кв. ед.).

Задание №3. Кратные интегралы (Двойной интеграл)

Условие задания: Вычислите двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ по заданной области D .

1. Изобразите область интегрирования D на координатной плоскости Oxy .
2. Расставьте пределы интегрирования в повторном интеграле (в порядке $dydx$ или $dx dy$).
3. Последовательно вычислите внутренний и внешний интегралы.

№ 1: $\iint_D (x + y) dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

№ 2: $\iint_D x^2 y dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

№ 3: $\iint_D (2x - y) dx dy$, где D ограничена линиями $y = x, y = 0, x = 1$

№ 4: $\iint_D x y^2 dx dy$, где D ограничена линиями $y = x^2, y = 1, x = 0$

№ 5: $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где D ограничена линиями $y = x, y = 2x, x = 1$

№ 6: $\iint_D e^{x+y} dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

№ 7: $\iint_D (x - y) dx dy$, где D ограничена линиями $y = \sqrt{x}, y = x$

№ 8: $\iint_D y \cos x dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 2$

№ 9: $\iint_D \frac{1}{(x+y+1)^2} dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

№ 10: $\iint_D (3x^2 + y) dx dy$, где D ограничена линиями $y = x, y = x^2$

№ 11: $\iint_D x \sin y dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi$

№ 12: $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$

№ 13: $\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy$, где $D: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x$

№ 14: $\iint_D y^3 dx dy$, где D ограничена линиями $y = x, y = 2, x = 0$

№ 15: $\iint_D (x + y) dx dy$, где D ограничена линиями $y = 4 - x^2, y = 0$

№ 16: $\iint_D x e^y dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$

№ 17: $\iint_D (2x + 3y^2) dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$

№ 18: $\iint_D \frac{y}{x} dx dy$, где $D: 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1$

№ 19: $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, где $D: 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$

№ 20: $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, где D ограничена линиями $y = 0, y = x, x = 2$

Методические рекомендации

- Геометрия области:** Сначала нарисуйте область D . Если границы — прямые линии ($x = 1, y = 2$), то это прямоугольник. Если кривые ($y = x^2$), то область будет криволинейной.
- Повторный интеграл:** Двойной интеграл сводится к "матрешке" из двух обычных интегралов.
 - Внешний интеграл (обычно по dx) всегда имеет числовые пределы (например, от 0 до 1).
 - Внутренний интеграл (по dy) может иметь пределы, зависящие от x (например, от нижней линии $y = 0$ до верхней линии $y = x^2$).
- Порядок вычислений:** Сначала вычислите внутренний интеграл по переменной y , считая x константой (числом). Полученный результат будет функцией только от x . Затем проинтегрируйте его по x обычным способом.
- Проверка:** Если область D симметрична, а функция нечётна, результат может быть равен нулю. Но чаще всего вы получите число — объем тела или массу пластины.

Критерии оценки задания

- **Чертеж области:** Правильное изображение границ области интегрирования.
- **Расстановка пределов:** Корректный перевод двойного интеграла в повторный с учетом формы области.
- **Внутреннее интегрирование:** Верное нахождение первообразной по первой переменной и подстановка пределов.
- **Итоговый расчет:** Точное вычисление внешнего интеграла и получение числового ответа.
- **Оформление:** Последовательность записи шагов интегрирования.

Задание №4. Дифференциальные уравнения I порядка

Условие задания: Найдите общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка. Определите тип уравнения: уравнение с разделяющимися переменными или линейное неоднородное уравнение первого порядка.

№ 1: $y' = 2xy^2$

№2: $y' + y = e^x$

№ 3: $xy' = y + x^2$

№ 4: $y' \cos x = y \sin x$

№ 5: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

№ 6: $y' = \frac{y}{x} + 1$

№ 7: $(1 + e^x)yy' = e^x$

№ 8: $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$

№ 9: $y' = \frac{y+1}{x+1}$

№ 10: $y' + 3y = e^{-2x}$

№ 11: $x^2y' + y = 0$

№ 12: $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

№ 13: $y' \sqrt{1 - x^2} = y$

№ 14: $y' - \frac{2y}{x} = x^3$

№ 15: $y' = y^2 \cdot \cos x$

№ 16: $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$

№ 17: $(1 + x^2) dy - xy dx = 0$

№ 18: $y' + 2y = 4x$

№ 19: $y' = e^{x-y}$

№ 20: $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \ln x$

Методические рекомендации

1. **Определение типа:**

- Если вы можете "растащить" y и x по разным сторонам от знака равенства так, чтобы получилось $f(y)dy = g(x)dx$ — это **уравнение с разделяющимися переменными**.
- Если уравнение имеет вид $y' + P(x)y = Q(x)$ — это **линейное уравнение**.

2. **Решение уравнений с разделяющимися переменными:**

- Замените y' на $\frac{dy}{dx}$.
- Перенесите всё с y к dy , а всё с x к dx .
- Поставьте знаки интеграла с обеих сторон и вычислите их. Не забудьте добавить $+C$.

3. **Решение линейных уравнений:**

- Используйте метод Бернулли: ищите решение в виде $y = u \cdot v$, где u и v — функции от x .
- Найдите u из условия, чтобы часть уравнения обнулилась (это будет интеграл с разделяющимися переменными).
- Затем найдите v , подставив найденное u обратно в уравнение.

4. **Важно:** Старайтесь выразить y в явном виде ($y = \dots$), если это не приводит к слишком громоздким выражениям.

Критерии оценки задания

- **Классификация:** Правильное определение типа дифференциального уравнения.
- **Разделение переменных/Подстановка:** Верное выполнение алгебраических преобразований для подготовки к интегрированию.
- **Интегрирование:** Безошибочное нахождение первообразных для обеих частей уравнения.
- **Константа интегрирования:** Правильный учет произвольной постоянной C в общем решении.
- **Логика:** Последовательность шагов решения (особенно для линейных уравнений методом uv).
- **Результат:** Получение корректного общего решения в явном или неявном виде.

Задание №5. Дифференциальные уравнения II порядка

Условие задания: Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. В зависимости от

№а, решите либо однородное уравнение ($f(x) = 0$), либо неоднородное уравнение с правой частью специального вида.

№1: $y'' - 5y' + 6y = 0$

№2: $y'' + 4y' + 4y = 0$

№3: $y'' + 9y = 0$

№4: $y'' - 4y' + 13y = 0$

№5: $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

№6: $y'' + y' - 2y = 4x$

№7: $y'' - 6y' + 9y = x^2$

№8: $y'' + 4y = \sin x$

№9: $y'' - 2y' + 5y = 0$

№10: $y'' + 5y' + 4y = 0$

№11: $y'' - y' = e^x$

№12: $y'' + 2y' + 5y = 0$

№13: $y'' - 4y = 8x - 4$

№14: $y'' + 6y' + 8y = 0$

№15: $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

№16: $y'' + 16y = \cos 2x$

№17: $y'' - 7y' + 10y = 0$

№18: $y'' + 2y' + y = x + 1$

№19: $y'' - 3y' = 0$

№20: $y'' + 2y' + 10y = 0$

Методические рекомендации

- 1. Характеристическое уравнение:** Это ваш главный инструмент. Замените y'' на k^2 , y' на k , а y просто уберите (оставьте коэффициент). Получится обычное квадратное уравнение $ak^2 + bk + c = 0$.
- 2. Три случая корней:**
 - Если корни k_1 и k_2 разные и настоящие (числа), решение выглядит так: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

- Если корень один (повторяется $k_1 = k_2 = k$), решение: $y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$.
 - Если корни "хитрые" (комплексные $\alpha \pm i\beta$), решение: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.
3. **Неоднородные уравнения (когда справа не ноль):**
- Сначала решите уравнение так, будто справа стоит ноль (найдите $y_{\text{одн}}$).
 - Затем "угадай" частное решение $y_{\text{част}}$ по виду правой части (если справа число — ищи число, если e^x — ищи e^x).
 - Итоговый ответ: $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}}$.
4. **Важно:** Не забудьте написать две константы — C_1 и C_2 . Уравнение второго порядка всегда требует двух таких "неизвестных" добавок.

Критерии оценки задания

- **Составление характеристического уравнения:** Правильный переход от производных к степеням k .
- **Нахождение корней:** Безошибочное вычисление дискриминанта и корней квадратного уравнения.
- **Выбор формы общего решения:** Верное сопоставление типа корней и соответствующей формулы с экспонентами или тригонометрией.
- **Метод неопределенных коэффициентов:** (Для неоднородных уравнений) Корректный выбор вида частного решения и нахождение его коэффициентов.
- **Синтез ответа:** Правильное объединение однородного и частного решений.
- **Математическая грамотность:** Отсутствие арифметических ошибок при работе с отрицательными числами и степенями.

Задание №6. Криволинейные интегралы

Условие задания: Вычислите криволинейный интеграл второго рода по заданной плоской кривой L . Кривая задана либо уравнением $y = f(x)$, либо параметрически $x = x(t), y = y(t)$.

№1: $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$, где L — отрезок прямой от $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$.

№2: $\int_L x^2 dy$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

№3: $\int_L y dx + x dy$, где L — четверть окружности $x = \cos t, y = \sin t$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$.

№4: $\int_L (x - 2y) dx$, где L — отрезок прямой $y = 2x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

№5: $\int_L x y dx$, где L — дуга $y = \sqrt{x}$ от $x = 1$ до $x = 4$.

№6: $\int_L (x + 1) dy$, где L — отрезок прямой от $A(1; 2)$ до $B(3; 5)$.

№7: $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, где L — отрезок прямой $y = x$ от $x = 0$ до $x = 2$.

№8: $\int_L \sin y dx + \sin x dy$, где L — отрезок от $(0; 0)$ до $(\pi/2; \pi/2)$.

№9: $\int_L (2x - y) dx + x dy$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от $(0; 0)$ до $(1; 1)$.

№10: $\int_L e^{x+y} dx$, где L — отрезок прямой $y = x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

№11: $\int_L (x^2 + y^2) dy$, где L — отрезок прямой $x = 2$ от $y = 0$ до $y = 3$.

№12: $\int_L y dx - x dy$, где L — дуга окружности $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ от $t = 0$ до $t = \pi$.

№13: $\int_L (x + y) dx$, где L — ломаная OAB : $O(0; 0), A(2; 0), B(2; 2)$.

№14: $\int_L x dy + y dx$, где L — дуга $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$.

№15: $\int_L (x^2 - y) dx$, где L — отрезок прямой от $A(1; 1)$ до $B(2; 4)$.

№16: $\int_L \sqrt{y} dx$, где L — дуга параболы $x = y^2$ от $y = 0$ до $y = 1$.

№17: $\int_L (x + 2y) dy$, где L — отрезок прямой $y = 3x + 1$ от $x = 0$ до $x = 1$.

№18: $\int_L \cos x dx + \sin y dy$, где L — отрезок от $(0; 0)$ до $(\pi; \pi)$.

№19: $\int_L (y - x) dx + (y + x) dy$, где L — дуга $y = x^2$ от $(-1; 1)$ до $(1; 1)$.

№20: $\int_L \ln(x + 1) dx + dy$, где L — отрезок от $(0; 0)$ до $(e - 1; 1)$.

Методические рекомендации

- 1. Суть интеграла:** Криволинейный интеграл второго рода часто называют «работой силы». Мы считаем сумму произведений силы на перемещение вдоль кривой.

2. **Переход к обычному интегралу:** Чтобы решить такой пример, нужно всё превратить в одну переменную (обычно в x или в параметр t).
 - Если $y = f(x)$, то замените в интеграле все y на $f(x)$, а dy замените на $f'(x)dx$.
 - Теперь у вас получится обычный определенный интеграл по x , который вы умеете решать.
3. **Параметрический вид:** Если кривая задана через t (как окружность), замените x на $x(t)$, y на $y(t)$, dx на $x'(t)dt$, а dy на $y'(t)dt$. Пределы интеграла станут от начального t_1 до конечного t_2 .
4. **Внимание к направлению:** В криволинейных интегралах важно, откуда и куда мы идем. Если идем от $x = 2$ до $x = 0$, то нижний предел интеграла будет 2, а верхний 0. Не меняйте их местами просто так!

Критерии оценки задания

- **Дифференцирование пути:** Правильное нахождение дифференциалов dx и dy через производные функций пути.
- **Подстановка:** Верная замена всех переменных в подынтегральном выражении.
- **Пределы интегрирования:** Корректное определение границ изменения переменной (или параметра) согласно направлению обхода кривой.
- **Вычисление:** Безошибочное нахождение первообразной и итогового числового значения.
- **Логика:** Последовательность перехода от криволинейного интеграла к определенному.

Задание №7. Сходимость числовых рядов

Условие задания: Исследуйте числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на сходимость. Для обоснования ответа используйте один из признаков сходимости: признак Даламбера, радикальный признак Коши или интегральный признак Коши.

$$\text{№ 1: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\text{№2: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{№3: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$\text{№4: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$$

$$\text{№5: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \text{ (начиная с } n = 2)$$

$$\text{№6: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$\text{№7: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

$$\text{№8: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$$

$$\text{№9: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n$$

$$\text{№10: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\text{№11: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

$$\text{№12: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n \cdot 4^n}$$

$$\text{№13: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$$

$$\text{№14: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\text{№15: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

$$\text{№16: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\text{№17: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} \text{ (начиная с } n = 2)$$

$$\text{№18: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\text{№19: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$$

$$\text{№20: } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{5n+2} \right)^n$$

Методические рекомендации

1. **Суть задачи:** Сходящийся ряд — это такая бесконечная сумма чисел, которая в итоге дает конкретное число. Расходящийся ряд уходит в бесконечность.
2. **Признак Даламбера:** Самый популярный. Используйте его, если в формуле есть факториал ($n!$) или число в степени n (2^n). Нужно найти предел отношения следующего члена к предыдущему: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 - Если $L < 1$ — **ряд сходится**.
 - Если $L > 1$ — **ряд расходится**.
3. **Радикальный признак Коши:** Используйте, если вся формула "сидит" в степени n . Найдите предел $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Правила для L те же, что и у Даламбера.
4. **Интегральный признак:** Если формулу легко превратить в функцию и проинтегрировать (как $\frac{1}{n \ln n}$), замените n на x и посчитайте несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$. Если интеграл равен числу — ряд сходится, если бесконечности — расходится.

Критерии оценки задания

- **Выбор признака:** Обоснованный выбор метода исследования (например, Даламбер для факториалов).
- **Работа с пределами:** Правильное раскрытие неопределенностей при вычислении L .
- **Упрощение выражений:** Верное сокращение дробей с факториалами и степенями (например, $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$).
- **Вывод:** Четкое указание, сходится ряд или расходится, на основании полученного значения предела.
- **Оформление:** Наличие записи общего члена a_n и последовательности вычислений.

Задание №8. Степенные ряды

Условие задания: Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
Для этого:

1. Вычислите радиус сходимости R , используя формулу Даламбера или радикальную формулу Коши для коэффициентов ряда.
2. Определите интервал сходимости $(-R; R)$.
3. Исследуйте сходимость ряда на концах интервала ($x = -R$ и $x = R$) и запишите окончательную область сходимости.

$$\text{№ 1: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

$$\text{№ 2: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\text{№ 3: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$\text{№ 4: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{№ 5: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

$$\text{№ 6: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$$

$$\text{№ 7: } \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$$

$$\text{№ 8: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$$

$$\text{№ 9: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$$

$$\text{№ 10: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{№ 11: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 \cdot 4^n}$$

$$\text{№ 12: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$$

$$\text{№ 13: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$\text{№ 14: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\text{№ 15: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n}$$

$$\text{№ 16: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \ln(n+1)}$$

$$\text{№ 17: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$$

$$\text{№ 18: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

$$\text{№19: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{n!}$$

$$\text{№20: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$$

Методические рекомендации

- 1. Радиус сходимости R :** Это "расстояние" от центра ряда до границы, где он перестает работать. Вычислите предел коэффициентов $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Тогда радиус будет обратной величиной: $R = 1/L$.
- 2. Интервал:** Внутри интервала $(-R; R)$ ряд всегда сходится абсолютно. Если $R = \infty$, ряд сходится везде. Если $R = 0$, ряд сходится только в нуле.
- 3. Проверка концов:** Это самый важный шаг. Подставьте вместо x сначала $-R$, а потом R . Получатся обычные числовые ряды.
 - Если ряд на конце сходится — скобка в ответе будет квадратной $[$.
 - Если расходится — круглой $($.
- 4. Знакопередающиеся ряды:** На концах часто получается ряд вида $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Помните признак Лейбница: если члены по модулю убывают и стремятся к нулю, такой ряд сходится.

Критерии оценки задания

- **Нахождение радиуса:** Правильное применение формулы для R и вычисление предела.
- **Определение интервала:** Корректная запись интервала $(-R; R)$ с учетом центра ряда (если есть смещение типа $x - 1$).
- **Анализ граничных точек:** Подстановка $x = \pm R$ и исследование полученных числовых рядов на сходимость.
- **Итоговая область:** Верное использование круглых и квадратных скобок в финальном ответе.
- **Математическая логика:** Последовательность и обоснованность всех этапов расширения области сходимости.

Задание №9. Ряды Фурье

Условие задания: Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$, заданную на интервале $[-\pi; \pi]$.

1. Проверьте функцию на чётность или нечётность для упрощения вычислений коэффициентов.
2. Вычислите коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n по стандартным формулам.
3. Запишите полученный ряд Фурье и укажите значения, к которым он сходится в точках разрыва (если они есть).

№1: $f(x) = x, x \in [-\pi; \pi]$

№2: $f(x) = |x|, x \in [-\pi; \pi]$

№3: $f(x) = x^2, x \in [-\pi; \pi]$

№4: $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

№5: $f(x) = 2x + 1, x \in [-\pi; \pi]$

№6: $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

№7: $f(x) = \pi - x, x \in [-\pi; \pi]$

№8: $f(x) = \sin(x/2), x \in [-\pi; \pi]$

№9: $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

№10: $f(x) = e^x, x \in [-\pi; \pi]$

№11: $f(x) = x + \pi, x \in [-\pi; \pi]$

№12: $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

№13: $f(x) = x^3, x \in [-\pi; \pi]$

№14: $f(x) = \cos(x/2), x \in [-\pi; \pi]$

№15: $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ (совпадает с $|x|$)

№16: $f(x) = 1 - x, x \in [-\pi; \pi]$

№17: $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

№18: $f(x) = \text{sign}(x) \cdot x^2, x \in [-\pi; \pi]$

№19: $f(x) = 3x - 2, x \in [-\pi; \pi]$

№20: $f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ -2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Методические рекомендации

1. **Симметрия:** Если функция **чётная** ($f(-x) = f(x)$), то все коэффициенты $b_n = 0$. Если **нечётная** ($f(-x) = -f(x)$), то $a_0 = 0$ и все $a_n = 0$. Это экономит половину времени!
2. **Формулы коэффициентов:**
 - $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
 - $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$
 - $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$
3. **Интегрирование:** Часто приходится использовать интегрирование по частям. Помните, что $\sin(n\pi) = 0$, а $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
4. **Вид ряда:** Итоговый ответ записывается в форме: $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
5. **Точки разрыва:** По теореме Дирихле, в точке разрыва x_0 ряд сходится к среднему арифметическому пределов слева и справа: $\frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$.

Критерии оценки задания

- **Анализ чётности:** Верное определение типа симметрии функции.
- **Техника интегрирования:** Правильное вычисление определенных интегралов для нахождения коэффициентов.
- **Использование свойств тригонометрии:** Корректная подстановка значений $\sin(n\pi)$ и $\cos(n\pi)$.
- **Запись ряда:** Соблюдение стандартной структуры ряда Фурье (наличие знака суммы и правильных аргументов nx).
- **Обоснование сходимости:** Верный вывод о поведении ряда в точках разрыва функции.

Задание №10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Условие задания: Дискретная случайная величина X задана своим рядом распределения.

1. Найдите неизвестную вероятность p (используя свойство нормировки).
2. Вычислите математическое ожидание $M(X)$.
3. Найдите дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.
4. Составьте функцию распределения $F(x)$ и постройте её график.

№	Значения X	Вероятности P
1	1,2,3,4	0,1; p ; 0,4; 0,2
2	-1,0,1,2	0,2; 0,3; p ; 0,1
3	10,20,30,40	p ; 0,2; 0,1; 0,5
4	0,1,2,3	0,4; 0,2; 0,3; p
5	-2, -1,0,1	0,1; p ; 0,3; 0,4
6	5,10,15,20	0,3; 0,1; p ; 0,2
7	1,3,5,7	p ; 0,4; 0,2; 0,1
8	0,2,4,6	0,2; 0,3; 0,3; p
9	-3,0,3,6	0,1; p ; 0,5; 0,1
10	2,4,6,8	0,3; 0,3; p ; 0,1
11	1,2,5,10	p ; 0,5; 0,1; 0,1
12	-1,1,3,5	0,2; 0,2; 0,4; p
13	0,1,4,9	0,4; p ; 0,2; 0,2
14	10,15,20,25	0,1; 0,4; p ; 0,3
15	-2,0,2,4	p ; 0,3; 0,3; 0,2
16	1,4,7,10	0,3; 0,2; 0,1; p
17	0,3,6,9	0,2; p ; 0,4; 0,1
18	5,6,7,8	0,1; 0,1; p ; 0,6
19	-5,0,5,10	0,4; 0,3; 0,2; p
20	2,3,4,5	p ; 0,2; 0,4; 0,2

Методические рекомендации

1. **Свойство нормировки:** Сумма всех вероятностей в ряду распределения всегда равна 1. Чтобы найти p , сложите известные числа и вычтите результат из единицы: $p = 1 - (p_1 + p_2 + p_3)$.
2. **Математическое ожидание $M(X)$:** Это "среднее значение" случайной величины. Умножьте каждое значение x_i на его вероятность p_i и сложите результаты: $M(X) = \sum x_i p_i$.
3. **Дисперсия $D(X)$:** Показывает разброс значений. Удобнее всего считать по формуле: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
 - Сначала найдите $M(X^2) = \sum x_i^2 p_i$ (возводите в квадрат только иксы, вероятности не трогайте!), а затем вычтите квадрат уже найденного ожидания.
4. **Среднее квадратическое отклонение:** Просто извлеките корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
5. **Функция распределения $F(x)$:** Это накопленная вероятность. Она всегда начинается с 0 (при $x \leq x_1$) и заканчивается 1 (при $x > x_4$). График представляет собой "лесенку", ступеньки которой идут вверх в точках x_i .

Критерии оценки задания

- **Расчет вероятности:** Правильное использование свойства нормировки.
- **Вычисление числовых характеристик:** Безошибочный расчет математического ожидания и дисперсии.
- **Логика построения функции $F(x)$:** Верное определение интервалов и значений накопленной вероятности.
- **Качество графика:** Соответствие ступенчатого вида функции распределения расчетным данным.
- **Математическая грамотность:** Указание размерности (если необходимо) и аккуратность записей.

Таблица 1 — Определение номера варианта контрольной работы

№ варианта	№ задания									
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
00	10	9	10	8	9	10	9	10	8	9
01	4	16	6	8	17	4	16	6	8	17
02	10	1	18	2	15	10	1	18	2	15
03	17	17	18	15	4	17	17	18	15	4
04	17	16	12	10	20	17	16	12	10	20
05	16	6	11	18	5	16	6	11	18	5
06	13	4	19	2	5	13	4	19	2	5
07	1	18	16	17	15	1	18	16	17	15
08	5	17	19	1	8	5	17	19	1	8
09	8	9	18	7	12	8	9	18	7	12
10	17	10	4	7	18	17	10	4	7	18
11	14	8	1	12	11	14	8	1	12	11
12	10	13	9	19	10	10	13	9	19	10
13	6	9	3	3	20	6	9	3	3	20
14	16	3	17	18	20	16	3	17	18	20
15	15	7	3	8	8	15	7	3	8	8
16	5	6	15	20	13	5	6	15	20	13
17	2	15	9	9	16	2	15	9	9	16
18	7	2	3	3	3	7	2	3	3	3
19	18	9	9	11	13	18	9	9	11	13
20	13	11	14	14	14	13	11	14	14	14
21	7	2	13	20	8	7	2	13	20	8
22	6	18	3	14	12	6	18	3	14	12
23	7	14	1	11	12	7	14	1	11	12
24	5	3	6	19	9	5	3	6	19	9
25	10	8	3	9	16	10	8	3	9	16
26	11	9	8	8	9	11	9	8	8	9
27	3	2	3	8	10	3	2	3	8	10
28	15	20	12	8	19	15	20	12	8	19

Продолжение Таблицы 1.

№ варианта	№ задания									
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
29	17	15	12	16	18	17	15	12	16	18
30	14	2	8	18	14	14	2	8	18	14
31	2	8	1	18	20	2	8	1	18	20
32	10	1	14	18	9	10	1	14	18	9
33	3	4	4	10	15	3	4	4	10	15
34	11	1	7	13	5	11	1	7	13	5
35	1	15	4	2	19	1	15	4	2	19
36	11	8	11	6	9	11	8	11	6	9
37	10	3	12	14	19	10	3	12	14	19
38	12	6	19	18	6	12	6	19	18	6
39	2	1	3	10	6	2	1	3	10	6
40	13	16	8	15	4	13	16	8	15	4
41	7	19	3	11	15	7	19	3	11	15
42	14	8	14	10	1	14	8	14	10	1
43	2	15	4	15	15	2	15	4	15	15
44	13	13	13	12	11	13	13	13	12	11
45	10	6	15	16	16	10	6	15	16	16
46	7	1	18	20	7	7	1	18	20	7
47	3	8	2	14	18	3	8	2	14	18
48	20	4	10	11	8	20	4	10	11	8
49	13	2	19	3	7	13	2	19	3	7
50	20	5	6	15	5	20	5	6	15	5
51	18	11	18	13	16	18	11	18	13	16
52	8	19	18	19	14	8	19	18	19	14
53	16	17	1	4	10	16	17	1	4	10
54	9	4	3	16	15	9	4	3	16	15
55	17	11	15	20	7	17	11	15	20	7
56	5	15	10	1	16	5	15	10	1	16
57	4	2	12	19	6	4	2	12	19	6
58	8	3	13	6	19	8	3	13	6	19

Продолжение Таблицы 1.

№ варианта	№ задания									
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
59	13	2	18	7	5	13	2	18	7	5
60	14	20	13	11	8	14	20	13	11	8
61	13	15	2	9	11	13	15	2	9	11
62	12	12	17	7	13	12	12	17	7	13
63	14	9	18	7	3	14	9	18	7	3
64	18	1	4	9	1	18	1	4	9	1
65	17	5	13	17	6	17	5	13	17	6
66	8	10	16	17	17	8	10	16	17	17
67	6	4	17	16	12	6	4	17	16	12
68	16	3	7	7	14	16	3	7	7	14
69	11	12	7	3	15	11	12	7	3	15
70	17	15	2	8	13	17	15	2	8	13
71	12	11	3	3	14	12	11	3	3	14
72	3	18	3	9	3	3	18	3	9	3
73	8	16	12	1	19	8	16	12	1	19
74	9	12	13	16	15	9	12	13	16	15
75	5	14	17	1	11	5	14	17	1	11
76	20	19	4	17	13	20	19	4	17	13
77	10	5	1	1	10	10	5	1	1	10
78	6	12	5	14	18	6	12	5	14	18
79	7	5	4	17	3	7	5	4	17	3
80	18	20	19	18	3	18	20	19	18	3
81	12	9	1	2	14	12	9	1	2	14
82	3	6	6	7	4	3	6	6	7	4
83	14	8	7	7	3	14	8	7	7	3
84	6	14	4	19	15	6	14	4	19	15
85	13	15	18	4	6	13	15	18	4	6
86	20	4	4	11	19	20	4	4	11	19
87	17	13	1	8	1	17	13	1	8	1
88	18	7	20	3	6	18	7	20	3	6

Продолжение Таблицы 1.

№ варианта	№ задания									
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
89	15	6	18	12	16	15	6	18	12	16
90	4	12	13	16	19	4	12	13	16	19
91	17	19	4	17	15	17	19	4	17	15
92	13	11	3	20	20	13	11	3	20	20
93	2	17	9	18	10	2	17	9	18	10
94	13	2	12	4	20	13	2	12	4	20
95	2	19	16	9	17	2	19	16	9	17
96	15	6	2	2	9	15	6	2	2	9
97	11	5	5	11	15	11	5	5	11	15
98	19	6	17	5	7	19	6	17	5	7
99	7	6	18	8	4	7	6	18	8	4

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Бугульминский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»
Кафедра Технологических машин и оборудования

Направление подготовки/специальность: 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

Профиль/специализация: Оборудование нефтегазопереработки

Семестр 2

Вопросы к экзамену

По дисциплине (модулю) Высшая математика

Раздел: Интегральное исчисление

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование.
3. Метод замены переменной (подстановки) в неопределенном интеграле.
4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле: формула и типы функций.
5. Интегрирование рациональных дробей методом разложения на простейшие.
6. Понятие определенного интеграла как предела интегральной суммы. Геометрический смысл.
7. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем значении.
8. Формула Ньютона-Лейбница — связь между определенным и неопределенным интегралами.
9. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.
10. Вычисление объемов тел вращения и длин дуг кривых.
11. Несобственные интегралы (с бесконечными пределами и от разрывных функций).
12. Двойной интеграл: определение, физический смысл (масса пластины) и вычисление в декартовых координатах.

Раздел: Дифференциальные уравнения (ДУ)

13. Основные понятия ДУ: порядок, общее и частное решения. Задача Коши.
14. ДУ первого порядка с разделяющимися переменными.
15. Линейные ДУ первого порядка: метод Бернулли или метод вариации произвольной постоянной.
16. Однородные ДУ первого порядка.
17. ДУ второго порядка: основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка.

18. Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения.
19. Линейные неоднородные ДУ второго порядка. Метод неопределенных коэффициентов для специальной правой части.

Раздел: Векторный анализ и ряды

20. Криволинейные интегралы первого и второго рода: определения и свойства.
21. Скалярное поле. Градиент скалярного поля и его свойства.
22. Векторное поле. Дивергенция и ротор (вихрь) векторного поля.
23. Числовые ряды: понятие суммы ряда, сходимость и расходимость. Необходимый признак сходимости.
24. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения.
25. Признак Даламбера и радикальный признак Коши для числовых рядов.
26. Интегральный признак Коши.
27. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Понятие абсолютной и условной сходимости.
28. Функциональные ряды: область сходимости.
29. Степенные ряды: радиус и интервал сходимости. Теорема Абеля.
30. Ряд Тейлора и ряд Маклорена. Разложение основных функций в степенные ряды.
31. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях (интегралы, ДУ).
32. Ряды Фурье: разложение периодических функций. Коэффициенты Фурье.

Раздел: Теория вероятностей и статистика

33. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности.
34. Основные теоремы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.
35. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Зависимые и независимые события.
36. Формула полной вероятности и формулы Байеса (переоценка вероятностей гипотез).
37. Случайные величины: дискретные и непрерывные. Закон распределения.
38. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины: смысл и свойства.
39. Основные законы распределения: биномиальный, Пуассона, нормальный закон (кривая Гаусса).
40. Задачи математической статистики: выборка, гистограмма, оценка параметров (среднее, дисперсия). Понятие о регрессии.

Оценочные средства	Min, баллов	Max, баллов
3-й семестр		
Экзамен	24	40

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Бугултминский филиал федерального государственного бюджетного

образовательного учреждения высшего образования

«Казанский национальный исследовательский

технологический университет»

(БФ ФГБОУ ВО «КНИТУ»)

БФ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

Разработчик - Кафедра «Технологические машины и оборудование»

РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине (модулю)

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(наименование дисциплины (модуля))

15.03.02 Технологические машины и оборудование

(код и наименование направления подготовки/ специальности)

Оборудование нефтегазопереработки

(наименование профиля/программы/направленности/специализации)

бакалавр

квалификация

Бугульма, 2025

Расчетное задание №3: Интегральное исчисление

Задание №1. Неопределенный интеграл

Теоретический материал для решения задания

Неопределенный интеграл — это совокупность всех первообразных функции. Если производная показывает скорость изменения, то интеграл позволяет восстановить функцию по её скорости.

1. **Непосредственное интегрирование:** Использование таблицы основных интегралов и свойств (интеграл суммы равен сумме интегралов, константу можно выносить за знак интеграла).

- Пример: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

2. **Метод подстановки (замена переменной):** Применяется, когда в выражении под интегралом одна часть является производной другой части. Мы вводим новую букву t , чтобы упростить выражение.

- Формула: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$, где $t = g(x)$.

3. **Интеграция по частям:** Применяется для произведений функций разных типов (например, многочлен на синус или логарифм).

- Формула: $\int u dv = uv - \int v du.$

- Совет: За u обычно выбирают многочлен (x, x^2), чтобы при дифференцировании он упростился. Если есть $\ln x$ или $\arctg x$, то за u выбирают их.

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Вычислить интегралы: а) $\int (5x^4 - 3\cos x + e^x)dx$; б) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; в) $\int xe^x dx$.

Непосредственное интегрирование Разбиваем интеграл на сумму трех простых интегралов, вынося числа за знак: $5\int x^4 dx - 3\int \cos x dx + \int e^x dx$.

Применяем табличные формулы: $5 \cdot \frac{x^5}{5} - 3\sin x + e^x + C = x^5 - 3\sin x + e^x + C$.

Метод подстановки Заметим, что в числителе стоит $2x$ — это производная от знаменателя $x^2 + 5$. Введем замену: $t = x^2 + 5$. Тогда производная $dt =$

$(x^2 + 5)' dx = 2x dx$. Подставляем в интеграл: $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$.

Возвращаемся к переменной x : $\ln(x^2 + 5) + C$.

Интегрирование по частям Используем формулу $\int u dv = uv - \int v du$. Пусть $u = x$ (многочлен), тогда $du = dx$. Пусть $dv = e^x dx$, тогда $v = \int e^x dx = e^x$. Подставляем в формулу: $x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$.

Варианты заданий

№	а) Табличный / Подведение	б) Подстановка	в) По частям
1	$\int (x^2 + \sin x) dx$	$\int \frac{dx}{3x - 2}$	$\int x \cos x dx$
2	$\int (3x^5 - e^x) dx$	$\int e^{4x+1} dx$	$\int x \sin x dx$
3	$\int (\sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx$	$\int \cos(5x - 3) dx$	$\int x e^{2x} dx$
4	$\int (2x^3 - \cos x) dx$	$\int \sin(2x) dx$	$\int \ln x dx$
5	$\int (e^x + 4) dx$	$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$	$\int x \ln x dx$
6	$\int (\frac{1}{\cos^2 x} - 2x) dx$	$\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$	$\int (x + 1) e^x dx$
7	$\int (x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$	$\int (2x - 5)^7 dx$	$\int x \cos 2x dx$
8	$\int (3^x + x^3) dx$	$\int \frac{\ln x}{x} dx$	$\int \operatorname{arctg} x dx$
9	$\int (\sin x + 5) dx$	$\int \sqrt{2x + 1} dx$	$\int x \cdot 3^x dx$
10	$\int (x^6 - e^x + 1) dx$	$\int \sin x \cos x dx$	$\int x^2 \ln x dx$
11	$\int (\frac{1}{x^2} + 4x) dx$	$\int e^{x^2} \cdot x dx$	$\int x \sin 3x dx$
12	$\int (2 \cos x - 3^x) dx$	$\int \frac{dx}{x \ln x}$	$\int (2x - 1) e^x dx$
13	$\int (\sqrt[3]{x} + e^x) dx$	$\int \cos^3 x \sin x dx$	$\int \ln(2x) dx$
14	$\int (5x^4 - 2) dx$	$\int \frac{x^2}{x^3 + 4} dx$	$\int x \cos(x/2) dx$

№	а) Табличный / Подведение	б) Подстановка	в) По частям
15	$\int (\frac{1}{\sin^2 x} + x) dx$	$\int e^{\sin x} \cos x dx$	$\int x \ln(x^2) dx$
16	$\int (x - \cos x) dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$	$\int (x+2) \sin x dx$
17	$\int (10^x - \sqrt{x}) dx$	$\int \frac{x^3}{x^4-1} dx$	$\int x e^{-x} dx$
18	$\int (\frac{3}{x} + x^2) dx$	$\int \sin(4x+5) dx$	$\int \operatorname{arctg} x dx$
19	$\int (e^x - \sin x) dx$	$\int x \sqrt{x^2+9} dx$	$\int (3x+1) \cos x dx$
20	$\int (x^3 - x + 1) dx$	$\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$	$\int \ln(x+1) dx$

Методические рекомендации

1. **Константа C:** Никогда не забывайте прибавлять $+C$ в конце решения. Это показывает, что первообразных бесконечно много.
2. **Проверка:** Лучший способ проверить себя — взять производную от полученного ответа. Вы должны получить ту же функцию, что стояла под знаком интеграла.
3. **Выбор метода:** Если под интегралом произведение «икс на что-то» — пробуйте части. Если под интегралом сложная функция, а рядом её производная — пробуйте замену.

Критерии оценки задания

- **Знание таблицы:** Правильное применение базовых формул интегрирования.
- **Логика замены:** Верный выбор выражения для замены t и корректный переход к дифференциалу dt .
- **Навык работы по частям:** Безошибочное распределение функций на u и dv и применение формулы.
- **Алгебраическая точность:** Отсутствие ошибок при раскрытии скобок и упрощении итогового выражения.

Задание №2. Определенный интеграл и его приложения

Теоретический материал для решения задания

Определенный интеграл — это число, которое получается при вычислении разности значений первообразной на границах интервала.

- Формула Ньютона-Лейбница:** Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ Сначала мы находим обычный неопределенный интеграл, а затем подставляем в него верхнее число (b), вычитаем подстановку нижнего числа (a).
- Площадь плоской фигуры:** Если фигура ограничена сверху функцией $y = f(x)$, снизу $y = g(x)$, а по бокам линиями $x = a$ и $x = b$, то её площадь вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ Важно правильно определить, какой график находится «выше».
- Объем тела вращения (вокруг оси Ox):** Если криволинейная трапеция под графиком $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вращается вокруг горизонтальной оси, объем получившейся фигуры равен: $V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Решение варианта №0 (Образец)

Условие:

- Вычислить $\int_1^2 (3x^2 - 1) dx$.
- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = x + 2$.
- Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.

Вычисление определенного интеграла Находим первообразную для функции $3x^2 - 1$: $F(x) = x^3 - x$. Применим формулу Ньютона-Лейбница: $\int_1^2 (3x^2 - 1) dx = (2^3 - 2) - (1^3 - 1) = (8 - 2) - (1 - 1) = 6 - 0 = 6$.

Нахождение площади фигуры Для начала найдем точки пересечения графиков $y = x^2$ и $y = x + 2$: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. На интервале $[-1, 2]$ прямая $y = x + 2$ лежит выше параболы $y = x^2$. Составим интеграл: $S = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx =$

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 S = \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = (6 - 2.67) - (0.5 - 2 + 0.33) = 3.33 - (-1.17) = 4.5.$$

Нахождение объема тела вращения Используем формулу объема с функцией $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0,4]$ (так как $y = 0$ и $x = 4$ задают границы):

$$V_x = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 V_x = \pi \left(\frac{16}{2} - 0\right) = 8\pi.$$

Варианты заданий

<i>№</i>	<i>1. Интеграл</i> $\int_a^b f(x)dx$	<i>2. Площадь фигур</i>	<i>3. Объем вращения</i> $y = f(x)$
1	$\int_0^1 (x^3 + 2)dx$	$y = x^2, y = 2x$	$y = x^2, x = 2, y = 0$
2	$\int_1^3 (2x - 1)dx$	$y = x^2 + 1, y = 2$	$y = x + 1, x = 0, x = 3$
3	$\int_0^\pi \sin x dx$	$y = \sqrt{x}, y = x$	$y = 2x, x = 1, x = 4$
4	$\int_1^2 (4x^3)dx$	$y = 4 - x^2, y = 0$	$y = \sqrt{x+1}, x = 0, x = 3$
5	$\int_0^1 e^x dx$	$y = x^3, y = x$	$y = x^3, x = 1, y = 0$
6	$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$y = x^2, y = 1$	$y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$
7	$\int_0^2 (x^2 + x)dx$	$y = x^2 - 1, y = 0$	$y = x, x = 0, x = 5$
8	$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$	$y = 2x, y = x^2$	$y = 3x, x = 0, x = 2$
9	$\int_0^{\pi/2} \cos x dx$	$y = x + 2, y = x^2$	$y = \sqrt{2x}, x = 2, x = 8$
10	$\int_0^1 (5x^4 - 1)dx$	$y = x^2, y = \sqrt{x}$	$y = e^x, x = 0, x = 1$

<i>№</i>	<i>1. Интеграл</i> $\int_a^b f(x)dx$	<i>2. Площадь фигур</i>	<i>3. Объем вращения $y = f(x)$</i>
11	$\int_2^3 (x^2 - 4)dx$	$y = 6x - x^2, y = 0$	$y = x + 2, x = 0, x = 2$
12	$\int_0^2 e^{2x} dx$	$y = x^2, y = x + 6$	$y = \sqrt{x}, x = 0, x = 9$
13	$\int_1^e \frac{1}{x} dx$	$y = 4x - x^2, y = 0$	$y = 2\sqrt{x}, x = 1, x = 4$
14	$\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$	$y = x^2, y = 4$	$y = x^2, x = 0, x = 1$
15	$\int_1^2 (3x^2 + 2x)dx$	$y = x^2, y = 2 - x$	$y = 1/x, x = 1, x = 2$
16	$\int_0^1 (1 - x^2)dx$	$y = x^2, y = 3x$	$y = \sqrt{4x}, x = 0, x = 1$
17	$\int_0^\pi 2 \sin x dx$	$y = x^2 + 2, y = x + 4$	$y = x^2, x = 1, x = 2$
18	$\int_1^4 (x + \sqrt{x})dx$	$y = x^2, y = x$	$y = \sqrt{x+2}, x = 0, x = 2$
19	$\int_0^1 (x + e^x)dx$	$y = x^2, y = 8 - x^2$	$y = 2x^2, x = 0, x = 1$
20	$\int_1^2 (x^3 - x)dx$	$y = x^2 - 4, y = 0$	$y = x + 3, x = 1, x = 2$

Методические рекомендации

- График — это половина решения:** При поиске площади обязательно нарисуйте эскиз графиков. Это поможет увидеть границы интегрирования и понять, какая функция вычитается из какой.
- Степень в объеме:** Не забывайте возводить функцию в квадрат в формуле объема ($V = \pi \int y^2 dx$). Если $y = \sqrt{x}$, то под интегралом будет просто x .

3. **Постоянная π :** В ответе для объема не теряйте число π . Его можно не переводить в 3.14, а оставить в буквенном виде.

Критерии оценки задания

- **Навык вычисления:** Безошибочное нахождение первообразной и подстановка пределов.
- **Геометрическая интерпретация:** Правильное определение границ интегрирования по точкам пересечения графиков.
- **Использование формул:** Корректное применение формул площади (разность функций) и объема (квадрат функции с множителем π).
- **Размерность:** Понимание того, что площадь и объем — это всегда положительные величины. Если получился «минус», значит нарушен порядок функций в разности.

Задание №3. Кратные интегралы

Теоретический материал для решения задания

Двойной интеграл — это обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных $z = f(x, y)$, заданной в некоторой области D на плоскости Oxy .

- 1. Вычисление в прямоугольных координатах:** Двойной интеграл сводится к «повторному» (последовательному) вычислению двух обычных интегралов.
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$
 Сначала мы вычисляем внутренний интеграл по y , считая x константой, а затем полученный результат интегрируем по x .
- 2. Переход к полярным координатам:** Этот метод незаменим, когда область D является кругом, его частью или кольцом. Используются формулы замены: $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $dx dy = \rho d\rho d\phi$ Здесь ρ (ро) — расстояние от начала координат до точки, а ϕ (фи) — угол. Важно не забыть добавить множитель ρ (якобиан) при переходе. Новая формула выглядит так:
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \cdot \rho d\rho$$

Решение варианта №0 (Образец)

Условие:

1. Вычислить $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где область D ограничена линиями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
2. Вычислить $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где D — круг $x^2 + y^2 \leq 9$.

Вычисление в прямоугольных координатах Область D представляет собой прямоугольник. Запишем двойной интеграл как повторный: $\int_0^1 dx \int_0^2 (x + 2y) dy$ Вычислим внутренний интеграл по y (при этом x считаем числом):
$$\int_0^2 (x + 2y) dy = [xy + y^2]_0^2 = (2x + 4) - (0 + 0) = 2x + 4$$
 Теперь подставим результат во внешний интеграл по x :
$$\int_0^1 (2x + 4) dx = [x^2 + 4x]_0^1 = (1 + 4) - 0 = 5$$

Переход к полярным координатам Область D — это круг радиуса $R = 3$. В полярных координатах границы круга: $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (полный оборот) и $0 \leq$

$\rho \leq 3$ (радиус от центра до края). Заметим, что выражение $x^2 + y^2 = \rho^2$, значит $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. Составим интеграл, не забывая про якобиан ρ :
 $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho \cdot \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 \rho^2 d\rho$ Вычислим внутренний интеграл по ρ :
 $\int_0^3 \rho^2 d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{3} = 9$ Вычислим внешний интеграл: $\int_0^{2\pi} 9 d\phi = [9\phi]_0^{2\pi} = 18\pi$

Варианты заданий

№	а) Прямоугольная область D	б) Полярная область (круг/сектор)
1	$\iint_D (x + y) dx dy; x \in [0,1], y \in [0,1]$	$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy; x^2 + y^2 \leq 1$
2	$\iint_D 2x dx dy; x \in [0,2], y \in [1,3]$	$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; x^2 + y^2 \leq 4$
3	$\iint_D (x - y) dx dy; x \in [1,2], y \in [0,2]$	$\iint_D dx dy; x^2 + y^2 \leq 16$
4	$\iint_D y^2 dx dy; x \in [0,1], y \in [0,2]$	$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy; x^2 + y^2 \leq 1$
5	$\iint_D (x + 2y) dx dy; x \in [0,3], y \in [0,1]$	$\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy; x^2 + y^2 \leq 1$
6	$\iint_D x y dx dy; x \in [1,3], y \in [1,2]$	$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
7	$\iint_D (2x + 3y) dx dy; x \in [0,2], y \in [0,2]$	$\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy; x^2 + y^2 \leq \pi/2$
8	$\iint_D (x^2 + y) dx dy; x \in [0,1], y \in [0,3]$	$\iint_D y dx dy; x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$
9	$\iint_D (y - 2x) dx dy; x \in [1,2], y \in [1,3]$	$\iint_D x dx dy; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$

№	а) Прямоугольная область D	б) Полярная область (круг/сектор)
10	$\iint_D (3x - y) dx dy; x \in [0,4], y \in [0,1]$	$\iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}; x^2 + y^2 \leq 1$
11	$\iint_D (x + 1) dx dy; x \in [0,1], y \in [1,4]$	$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy; x^2 + y^2 \leq 4$
12	$\iint_D (2y) dx dy; x \in [2,3], y \in [0,2]$	$\iint_D (x + y) dx dy; x^2 + y^2 \leq 9, x, y \geq 0$
13	$\iint_D (x^2 y) dx dy; x \in [0,1], y \in [0,1]$	$\iint_D \ln(x^2 + y^2 + 1) dx dy; x^2 + y^2 \leq 1$
14	$\iint_D (x - 2y) dx dy; x \in [0,2], y \in [2,4]$	$\iint_D dx dy; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$
15	$\iint_D (3x^2) dx dy; x \in [0,1], y \in [0,5]$	$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy; x^2 + y^2 \leq 1$
16	$\iint_D (y + 4) dx dy; x \in [1,4], y \in [0,2]$	$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy; x^2 + y^2 \leq R^2$
17	$\iint_D (x + y^2) dx dy; x \in [0,2], y \in [0,1]$	$\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy; x^2 + y^2 \leq \pi$
18	$\iint_D (2xy) dx dy; x \in [0,3], y \in [0,3]$	$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}; 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$
19	$\iint_D (4x + y) dx dy; x \in [1,2], y \in [2,3]$	$\iint_D y^2 dx dy; x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$
20	$\iint_D (x - 3y) dx dy; x \in [0,2], y \in [0,4]$	$\iint_D \rho d\rho d\phi; 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 2$

Методические рекомендации

1. **Порядок интегрирования:** В прямоугольных областях порядок интегрирования ($dx dy$ или $dy dx$) не влияет на сложность счета. Однако если область криволинейная (треугольник или парабола), выбирайте тот порядок, где функции на границах проще.
2. **Якобиан:** Самая частая ошибка в полярных координатах — потеря множителя ρ . Всегда пишите $\rho d\rho d\phi$ вместо $d\rho d\phi$.
3. **Пределы угла ϕ :**
 - Полный круг: от 0 до 2π .
 - Верхняя полуокружность ($y \geq 0$): от 0 до π .
 - Первая четверть ($x \geq 0, y \geq 0$): от 0 до $\pi/2$.

Критерии оценки задания

- **Правильность расстановки пределов:** Верное определение границ области интегрирования для обоих типов координат.
- **Техника вычисления:** Безошибочное нахождение первообразных для внутренних и внешних интегралов.
- **Корректность замены:** Правильный переход к полярным координатам, включая замену функции и добавление якобиана.
- **Результат:** Получение конечного числового значения (в полярных координатах допускается ответ с числом π).

Задание №4. Дифференциальные уравнения первого порядка

Теоретический материал для решения задания

Дифференциальное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ и её производную y' . Решить его — значит найти такую функцию y , которая при подстановке обращает уравнение в верное равенство.

- 1. Уравнения с разделяющимися переменными:** Имеют вид $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$. Основная идея: перенести всё с y к дифференциалу dy , а всё с x к dx . После этого обе части интегрируются. $\int f(y)dy = \int g(x)dx$
- 2. Однородные уравнения:** Уравнения вида $y' = f(y/x)$. Они решаются стандартной подстановкой $y = u \cdot x$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда производная $y' = u'x + u$. После подстановки уравнение всегда сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно u и x .
- 3. Линейные уравнения первого порядка:** Имеют вид $y' + P(x)y = Q(x)$.
 - **Метод Бернулли (подстановка $y = uv$):** Мы представляем решение в виде произведения двух функций. Дифференцируем: $y' = u'v + uv'$. Подставляем в уравнение: $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$. Сначала находим v так, чтобы скобка обнулилась, а затем находим u .
 - **Метод Лагранжа (вариация постоянной):** Сначала решается однородное уравнение ($Q(x) = 0$), а затем константа C заменяется на функцию $C(x)$.

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Решить уравнения: а) $y' = 2xy$; б) $xy' = y + x$; в) $y' - \frac{y}{x} = x$.

Решение уравнения с разделяющимися переменными Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \text{ Проинтегрируем обе части уравнения: } \int \frac{dy}{y} =$$

$$\int 2x dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C \text{ Выразим } y \text{ через экспоненту: } y = e^{x^2+C} = e^C \cdot e^{x^2}.$$

Обозначим e^C как новую константу C . Общее решение: $y = Ce^{x^2}$.

Решение однородного уравнения Разделим обе части на x : $y' = \frac{y}{x} + 1$. Это однородное уравнение. Применим подстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$: $u'x + u = u + 1 \Rightarrow u'x = 1 \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 1$ Разделим переменные: $du = \frac{dx}{x}$. Интегрируем: $u = \ln|x| + C$. Вернемся к y : так как $u = y/x$, то $y/x = \ln|x| + C$. Общее решение: $y = x(\ln|x| + C)$.

Решение линейного уравнения (метод Бернулли) Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в $y' - \frac{y}{x} = x$: $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \Rightarrow u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x$ Найдем v из условия $v' - \frac{v}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow v = x$. Подставим $v = x$ в оставшуюся часть уравнения: $u' \cdot x = x \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow u = x + C$ Общее решение $y = uv$: $y = (x + C)x = x^2 + Cx$.

Варианты заданий

№	а) Разделяющиеся	б) Однородные	в) Линейные
1	$y' = 3x^2y$	$xy' = y + 2x$	$y' + y = e^x$
2	$y' = y/x^2$	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	$y' - 2y = 4x$
3	$y'\sqrt{x} = y$	$xy' = y - x$	$y' + \frac{y}{x} = 2$
4	$y' = y \cos x$	$y' = \frac{y+x}{x}$	$y' + 2xy = x$
5	$y' = e^x y$	$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$	$y' - \frac{y}{x} = x^2$
6	$y' = y^2 x$	$y' = \frac{2y}{x}$	$y' + y = \sin x$
7	$y' = \frac{1+y^2}{x}$	$xy' = y - 2\sqrt{xy}$	$y' + \frac{2y}{x} = x^3$
8	$y' \sin x = y \cos x$	$y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$	$y' - y = e^{2x}$
9	$y' = y \ln y$	$y' = \frac{x+2y}{x}$	$y' + y = x$
10	$y' = \frac{x}{y}$	$x^2 y' = y^2 + xy$	$y' - \frac{y}{x} = \ln x$
11	$y' = 4xy$	$y' = \frac{y}{x} + 1$	$y' + 3y = e^{-2x}$

<i>№</i>	<i>а) Разделяющиеся</i>	<i>б) Однородные</i>	<i>в) Линейные</i>
12	$y' = \sqrt{y}x$	$xy' = y + x\cos(y/x)$	$y' + \frac{y}{x} = \sin x$
13	$y' = y(x + 1)$	$y' = \frac{y}{x} - 1$	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
14	$y' = \frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}$	$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$	$y' + \frac{y}{x} = e^x$
15	$y' = e^y x$	$xy' = y\ln(y/x)$	$y' - y = x^2$
16	$y' = y/x$	$y' = \frac{y + x}{y - x}$	$y' + 2y = 4$
17	$y' = y^3 x^2$	$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$	$y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$
18	$y' \cos^2 x = y$	$xy' = y + x\sin(y/x)$	$y' - y = \cos x$
19	$y' = \frac{y}{x \ln x}$	$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$	$y' + \frac{y}{x} = x + 1$
20	$y' = y^2$	$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}(y/x)$	$y' - 3y = e^{3x}$

Методические рекомендации

4. **Порядок выбора метода:** Сначала всегда проверяйте, нельзя ли разделить переменные. Если нет — проверьте, является ли уравнение однородным (степени всех слагаемых должны быть одинаковы). Если и это не подходит — уравнение, скорее всего, линейное.
5. **Константа интегрирования:** В линейных уравнениях при нахождении функции v константу C можно принять равной нулю (нам нужна *любая* одна функция v). Однако в итоговом решении для u (и y) константа обязательна.
6. **Логарифмы:** Если в ответе много логарифмов, их можно объединить по правилам логарифмирования ($\ln a + \ln b = \ln ab$), чтобы ответ выглядел компактнее.

Критерии оценки задания

- **Классификация:** Правильное определение типа дифференциального уравнения.

- **Техника разделения:** Умение грамотно разносить переменные по разным частям равенства.
- **Использование подстановок:** Корректное выполнение замены в однородных и линейных уравнениях.
- **Результат:** Нахождение общего решения (общего интеграла) в явном или неявном виде.

Ниже представлено расчетное задание №5 по разделу «Дифференциальные уравнения высших порядков».

Задание №5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Теоретический материал для решения задания

Дифференциальное уравнение второго порядка — это уравнение, в котором есть не только сама функция y и её первая производная y' , но и вторая производная y'' (скорость изменения скорости).

- Линейное однородное уравнение ($ay'' + by' + cy = 0$):** Чтобы его решить, нужно составить **характеристическое уравнение:** $ar^2 + br + c = 0$. Это обычное квадратное уравнение.
 - Если корни r_1 и r_2 разные и вещественные: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
 - Если корень один (кратный): $y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$.
 - Если корни комплексные ($r = \alpha \pm i\beta$): $y_{\text{одн}} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.
- Линейное неоднородное уравнение ($ay'' + by' + cy = f(x)$):** Его общее решение состоит из суммы двух частей: $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}}$.
 - $y_{\text{одн}}$ — решение такого же уравнения, но с нулем справа.
 - $y_{\text{част}}$ — «угадывается» по виду правой части $f(x)$. Например, если справа стоит многочлен $12x$, то мы ищем решение в виде $Ax + B$.
- Метод неопределенных коэффициентов:** Мы подставляем «угаданное» решение $y_{\text{част}}$ в исходное уравнение, чтобы найти конкретные значения букв A, B и других.

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 12x$.

Поиск общего решения однородного уравнения Заменяем производные на степени буквы r : $r^2 - 5r + 6 = 0$. Решим через дискриминант или по теореме Виета. Корни уравнения: $r_1 = 2, r_2 = 3$. Запишем однородное решение: $y_{\text{одн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Поиск частного решения неоднородного уравнения Справа стоит многочлен первой степени $12x$. Будем искать решение в виде $y_{\text{част}} = Ax + B$. Найдем производные: $y'_{\text{част}} = A, y''_{\text{част}} = 0$ Подставим эти значения в

исходное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 12x$: $0 - 5(A) + 6(Ax + B) = 12x \Rightarrow 6Ax + (6B - 5A) = 12x$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x : При x : $6A = 12 \Rightarrow A = 2$. Свободные числа: $6B - 5A = 0 \Rightarrow 6B - 5(2) = 0 \Rightarrow 6B = 10 \Rightarrow B = 5/3$. Частное решение имеет вид: $y_{\text{част}} = 2x + \frac{5}{3}$.

Составление общего решения Складываем обе части: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 2x + \frac{5}{3}$.

Варианты заданий

№	а) Однородное уравнение	б) Неоднородное уравнение
1	$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y'' + 4y = 8x^2$
2	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y'' - y = 2x - 3$
3	$y'' + 2y' + 5y = 0$	$y'' + 2y' = 4x$
4	$y'' - 5y' + 4y = 0$	$y'' + y = 3x^2 + 1$
5	$y'' + 6y' + 9y = 0$	$y'' - 4y' + 3y = 9x$
6	$y'' + 4y' + 13y = 0$	$y'' + y' = x + 2$
7	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y'' - 2y' + y = 2x$
8	$y'' + 2y' + y = 0$	$y'' + 9y = 18x$
9	$y'' - 4y = 0$	$y'' - 3y' = 3x^2$
10	$y'' + 4y = 0$	$y'' + 4y' + 4y = 8x$
11	$y'' - 6y' + 8y = 0$	$y'' - 2y' = 2x + 1$
12	$y'' + 2y' + 2y = 0$	$y'' + 5y' + 6y = 12x^2$
13	$y'' - y' - 2y = 0$	$y'' - y' = x - 1$
14	$y'' - 2y' + 2y = 0$	$y'' + 3y' = 6x$
15	$y'' + 10y' + 25y = 0$	$y'' + y = 5x - 2$
16	$y'' - 7y' + 10y = 0$	$y'' - 4y = 4x^2$
17	$y'' + 6y' + 10y = 0$	$y'' + 2y' + y = x$
18	$y'' - 16y = 0$	$y'' - 5y' = 10x$
19	$y'' + 8y' + 16y = 0$	$y'' + 6y' + 8y = 4x$
20	$y'' + 25y = 0$	$y'' + 4y' = 8x + 4$

Методические рекомендации

1. **Корни уравнения:** Будьте внимательны при расчете дискриминанта. Если он отрицательный, не пишите «решений нет» — в дифференциальных уравнениях это ведет к ответу через синусы и косинусы.
2. **Случай резонанса:** Если правая часть «совпадает» с корнем характеристического уравнения (например, справа число, а один из корней $r = 0$), то в частном решении нужно добавить множитель x (например, искать не A , а Ax).
3. **Проверка:** Подставьте найденное решение обратно в исходное уравнение. Оно должно превратиться в тождество.

Критерии оценки задания

- **Алгебраическая грамотность:** Верное решение квадратного характеристического уравнения.
- **Выбор структуры ответа:** Соответствие вида $y_{\text{одн}}$ типу найденных корней (вещественные, кратные или комплексные).
- **Метод коэффициентов:** Правильное «угадывание» формы частного решения $y_{\text{част}}$ и безошибочное нахождение букв A, B и т.д.
- **Полнота:** Запись окончательного ответа как суммы двух частей.

Ниже представлено расчетное задание №1 по разделу «Числовые ряды».

Расчетное задание №4: Ряды, векторный анализ и теория вероятностей

Задание №1. Числовые ряды

Теоретический материал для решения задания

Числовой ряд — это бесконечная сумма чисел $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Основной вопрос: можно ли сложить бесконечно много чисел и получить в итоге конкретное число? Если да, ряд называется **сходящимся**, если сумма уходит в бесконечность — **расходящимся**.

1. **Необходимый признак сходимости:** Если общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сразу расходится. Если стремится к нулю — нужно проверять дальше.
2. **Признак Даламбера:** Применяется, когда в формуле есть факториалы ($n!$) или степени ($2^n, 3^n$). Находим предел отношения следующего члена к предыдущему: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
 - Если $L < 1$ — ряд сходится.
 - Если $L > 1$ — ряд расходится.
3. **Радикальный признак Коши:** Удобен, когда всё выражение возведено в степень n . Находим $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Правила те же, что и у Даламбера.
4. **Признак сравнения:** Мы сравниваем наш ряд с «эталонным» рядом (например, гармоническим $\sum \frac{1}{n}$ — он расходится, или геометрической прогрессией — она сходится при $|q| < 1$).

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$.

Применение признака Даламбера В первом ряду $a_n = \frac{n}{3^n}$. Составим следующий член ряда: $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Найдем предел их отношения: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n}$ Разделим числитель и знаменатель на n : $L = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{1} = \frac{1}{3}$ Так как $L = 1/3 < 1$, ряд **сходится**.

Применение признака Коши Во втором ряду всё выражение стоит в

степени n . Извлечем корень n -й степени: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1}$ Разделим на n : $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3-1/n} = \frac{2}{3}$ Так как $L = 2/3 < 1$, ряд **сходится**.

Варианты заданий

Исследовать ряды на сходимость, выбрав подходящий признак.

<i>№</i>	<i>а) Признак Даламбера</i>	<i>б) Признак Коши</i>	<i>№</i>	<i>а) Признак Даламбера</i>	<i>б) Признак Коши</i>
1	$\sum \frac{2n}{5^n}$	$\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$	11	$\sum \frac{n+2}{4^n}$	$\sum \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$
2	$\sum \frac{n^2}{2^n}$	$\sum \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^n$	12	$\sum \frac{3^n}{n!}$	$\sum \left(\frac{n+1}{5n}\right)^n$
3	$\sum \frac{n!}{10^n}$	$\sum \left(\frac{1}{n}\right)^n$	13	$\sum \frac{2^n}{n^3}$	$\sum \left(\frac{4n+1}{n+5}\right)^n$
4	$\sum \frac{n+1}{e^n}$	$\sum \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$	14	$\sum \frac{n^5}{5^n}$	$\sum \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$
5	$\sum \frac{5^n}{n!}$	$\sum \left(\frac{n-1}{2n}\right)^n$	15	$\sum \frac{(n+1)!}{3^n}$	$\sum \left(\frac{5n}{6n+1}\right)^n$
6	$\sum \frac{2^n}{n^2}$	$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$	16	$\sum \frac{n}{n!}$	$\sum \left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$
7	$\sum \frac{n^3}{3^n}$	$\sum \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$	17	$\sum \frac{10^n}{n!}$	$\sum \left(\frac{2n}{3n}\right)^n$
8	$\sum \frac{n!}{n^n}$	$\sum \left(\frac{n}{4n+2}\right)^n$	18	$\sum \frac{n^2+1}{2^n}$	$\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
9	$\sum \frac{4^n}{n}$	$\sum \left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n$	19	$\sum \frac{n! \cdot 2}{e^n}$	$\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
10	$\sum \frac{1}{n \cdot 2^n}$	$\sum \left(\frac{2}{n+1}\right)^n$	20	$\sum \frac{3^n}{n^2}$	$\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

Методические рекомендации

1. **Факториалы:** Помните, что $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$. Это позволяет сокращать огромные выражения в признаке Даламбера.
2. **Сравнение с единицей:** Самое важное — сравнить полученное число L с единицей. Если $L = 1$, признак не дает ответа (ряд может как сходиться, так и расходиться), и нужно использовать другой метод.
3. **Бесконечность:** При вычислении пределов всегда смотрите на старшую степень n . Если она одинаковая сверху и снизу, ответом будет отношение коэффициентов.

Критерии оценки задания

- **Выбор стратегии:** Правильный подбор признака в зависимости от вида общего члена ряда.
- **Преобразование выражений:** Безошибочное сокращение степеней и факториалов.
- **Предельный переход:** Корректное вычисление предела при n , стремящемся к бесконечности.
- **Вывод:** Наличие обоснованного заключения о сходимости или расходимости ряда на основе полученного значения L .

Задание №2. Степенные ряды и ряды Фурье

Теоретический материал для решения задания

- 1. Степенной ряд** — это ряд вида $\sum a_n x^n$. Основная задача — найти **интервал сходимости** $(-R, R)$, внутри которого ряд превращается в число.
 - **Радиус сходимости R** : Находится по формуле Даламбера: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.
 - **Область сходимости**: После нахождения R необходимо отдельно проверить поведение ряда в крайних точках $x = R$ и $x = -R$.
- 2. Ряд Маклорена** — это разложение функции $f(x)$ по степеням x . Для решения используются готовые табличные разложения для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^m$.
- 3. Ряд Фурье** — это разложение периодической функции в сумму синусов и косинусов на интервале $[-\pi, \pi]$: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ Коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся через интегралы. Если функция четная, то $b_n = 0$; если нечетная, то $a_0 = a_n = 0$.

Решение варианта №0 (Образец)

Условие:

1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.
2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Нахождение области сходимости Выпишем коэффициент ряда: $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2 \text{ Интервал сходимости: } (-2, 2).$$

Проверим границы: При $x = 2$: имеем ряд $\sum \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum \frac{1}{n}$ — гармонический ряд,

он расходится. При $x = -2$: имеем ряд $\sum \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ —

знакопередающийся ряд, он сходится по признаку Лейбница. **Область сходимости:** $[-2, 2)$.

Разложение в ряд Маклорена Воспользуемся стандартным разложением для экспоненты: $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$. Заменяем переменную t на $-x^2$: $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots$ Это разложение верно для любого x .

Варианты заданий

<i>№</i>	<i>а) Область сходимости ряда</i>	<i>б) Разложение в ряд Маклорена</i>
1	$\sum \frac{x^n}{n+1}$	$f(x) = \sin(2x)$
2	$\sum \frac{x^n}{3^n}$	$f(x) = \cos(x^2)$
3	$\sum \frac{x^n}{n!}$	$f(x) = e^{3x}$
4	$\sum nx^n$	$f(x) = \ln(1-x)$
5	$\sum \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$	$f(x) = \frac{1}{1+x}$
6	$\sum \frac{x^n}{n^2}$	$f(x) = \sin(x/2)$
7	$\sum \frac{2^n x^n}{n}$	$f(x) = e^{-x}$
8	$\sum \frac{x^n}{10^n}$	$f(x) = \cos(3x)$
9	$\sum (n+1)x^n$	$f(x) = \ln(1+2x)$
10	$\sum \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$	$f(x) = \sqrt{1+x}$
11	$\sum \frac{x^n}{n! \cdot 2}$	$f(x) = \sin^2 x$ (через понижение степени)
12	$\sum \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$	$f(x) = e^{x/3}$
13	$\sum \frac{3^n x^n}{n^2}$	$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

<i>№</i>	<i>а) Область сходимости ряда</i>	<i>б) Разложение в ряд Маклорена</i>
14	$\sum \frac{x^n}{2n+1}$	$f(x) = x \cdot \sin x$
15	$\sum \frac{x^n}{n \cdot e^n}$	$f(x) = \ln(1+x^2)$
16	$\sum \frac{x^n}{4^n}$	$f(x) = \cos(x/4)$
17	$\sum \frac{n! x^n}{n^n}$	$f(x) = e^{2x^2}$
18	$\sum \frac{x^{2n}}{n}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
19	$\sum \frac{(x-1)^n}{n}$ (центр в $x = 1$)	$f(x) = x \cdot e^x$
20	$\sum \frac{x^n}{3n+1}$	$f(x) = \sin(x^3)$

Методические рекомендации

- Проверка границ:** При поиске области сходимости не ограничивайтесь только радиусом R . Обязательно проверьте концы интервала — там часто возникают знакопеременные ряды, которые могут сходиться.
- Табличные разложения:** Не пытайтесь находить производные n -го порядка вручную. В большинстве задач достаточно использовать готовые ряды (Маклорена), делая в них замену аргумента.
- Степень x :** Если в ряде Маклорена функция умножается на x (например, $x \cdot \sin x$), просто умножьте каждое слагаемое ряда на x .

Критерии оценки задания

- **Нахождение радиуса:** Корректное использование формулы Даламбера или Коши.
- **Анализ границ:** Верное исследование сходимости в точках $x = \pm R$.
- **Владение таблицей:** Умение подобрать нужное разложение для заданной функции.

- **Алгебраическая форма:** Запись общего члена ряда в итоговом разложении (выражение через n).

Задание №3. Векторный анализ

Теоретический материал для решения задания

Векторное поле — это область пространства, в каждой точке которой задан вектор $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

1. **Работа силы (Криволинейный интеграл):** Работа силы \vec{F} вдоль пути L вычисляется как интеграл: $A = \int_L P dx + Q dy + R dz$. Если путь задан параметрически $x(t), y(t), z(t)$, то мы заменяем все переменные на t и интегрируем по параметру t от t_1 до t_2 .

2. **Дивергенция ($\text{div } \vec{F}$):** Это числовая характеристика (скаляр), которая показывает наличие «источников» или «стоков» в данной точке поля.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

3. **Ротор ($\text{rot } \vec{F}$):** Это векторная характеристика, которая показывает «завихренность» поля. Находится через определитель: $\text{rot } \vec{F} =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Дано векторное поле $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Найти работу силы при перемещении вдоль отрезка от $A(0,0,0)$ до $B(1,1,1)$.
2. Найти дивергенцию и ротор поля.

Вычисление работы силы Параметризуем отрезок AB : $x = t, y = t, z = t$, где t меняется от 0 до 1. Тогда $dx = dt, dy = dt, dz = dt$. Подставим в интеграл работы: $A = \int_0^1 (t^2 dt + t^2 dt + t^2 dt) = \int_0^1 3 t^2 dt = [t^3]_0^1 = 1 - 0 = 1$ Работа силы равна 1.

Нахождение дивергенции Выпишем компоненты: $P = x^2, Q = y^2, R = z^2$.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 2x + 2y + 2z \text{ Дивергенция равна } 2(x + y + z).$$

Нахождение ротора $\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} \right) \vec{j} +$

$\left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \vec{k}$ Так как каждая компонента зависит только от «своей» переменной, все частные производные в формуле ротора равны нулю ($0 - 0, 0 - 0, 0 - 0$). Ротор равен $\vec{0}$ (поле безвихревое).

Варианты заданий

Найдите $\operatorname{div} \vec{F}$ и $\operatorname{rot} \vec{F}$ для заданного поля. Вычислите работу силы вдоль отрезка OA , где $O(0,0,0), A(1,1,1)$.

№	Векторное поле $\vec{F}(P, Q, R)$	№	Векторное поле $\vec{F}(P, Q, R)$
1	$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	11	$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$
2	$\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$	12	$\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$
3	$\vec{F} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	13	$\vec{F} = \sin x\vec{i} + \cos y\vec{j} + e^z\vec{k}$
4	$\vec{F} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$	14	$\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$
5	$\vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$	15	$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$
6	$\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$	16	$\vec{F} = e^x\vec{i} + e^y\vec{j} + e^z\vec{k}$
7	$\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - z)\vec{j} + (z^2 - x)\vec{k}$	17	$\vec{F} = \ln(x + 1)\vec{i} + \ln(y + 1)\vec{j} + z\vec{k}$
8	$\vec{F} = 3x^2y\vec{i} + x^3\vec{j} + \vec{k}$	18	$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$
9	$\vec{F} = \sqrt{x}\vec{i} + \sqrt{y}\vec{j} + \sqrt{z}\vec{k}$	19	$\vec{F} = (x + z)\vec{i} + y\vec{j} + (x + y)\vec{k}$
10	$\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$	20	$\vec{F} = x^2z\vec{i} + y^2x\vec{j} + z^2y\vec{k}$

Методические рекомендации

1. **Дифференцирование:** Будьте крайне внимательны при вычислении частных производных для ротора. Если вы дифференцируете $P(x, y, z)$ по y , все переменные x и z считаются константами.
2. **Параметризация:** При вычислении работы по прямой линии $x = t, y = t, z = t$ — это самый простой путь. Не забудьте заменить не только функции, но и дифференциалы dx, dy, dz на dt .
3. **Физический смысл:** Помните, что если ротор равен нулю ($\text{rot } \vec{F} = 0$), то поле называется потенциальным, и работа в нем не зависит от формы пути, а только от начальной и конечной точек.

Критерии оценки задания

- **Навык дифференцирования:** Безошибочное нахождение частных производных функций нескольких переменных.
- **Оперирование операторами:** Правильное применение формул дивергенции (сумма) и ротора (вектор/определитель).
- **Интегрирование:** Умение сводить криволинейный интеграл к определенному через параметр.
- **Формат ответа:** Ротор должен быть представлен в виде вектора, а дивергенция и работа — в виде функций или чисел.

Ниже представлено расчетное задание №4 по разделу «Теория вероятностей».

Задание №4. Основы теории вероятностей

Теоретический материал для решения задания

Вероятность — это число от 0 до 1, которое показывает, насколько часто может произойти событие.

- 1. Классическое определение:** $P(A) = \frac{m}{n}$ Где n — это общее количество всех возможных исходов, а m — количество исходов, которые нам подходят («благоприятные»).
- 2. Сложение и умножение:**
 - Если события «или то, или другое», вероятности **складываются**.
 - Если события происходят «и то, и другое» одновременно (или подряд), вероятности **перемножаются**.
- 3. Формула полной вероятности:** Применяется, когда событие A может произойти только вместе с одной из «гипотез» H_i . $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots$ Простыми словами: мы считаем шанс события для каждого пути и складываем результаты.
- 4. Формула Байеса:** Позволяет переоценить шансы гипотезы, если событие A уже произошло. Она отвечает на вопрос: «Зная, что деталь бракованная, каков шанс, что её сделал первый станок?». $P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}$

Решение варианта №0 (Образец)

Условие:

1. В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают 2 шара. Какова вероятность, что оба шара белые?
2. На склад поступают лампы с двух заводов. Первый поставляет 70%, второй — 30%. Вероятность брака на первом заводе 0.05, на втором — 0.1. Купленная лампа оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она сделана на втором заводе.

Решение задачи на классическую вероятность Сначала найдем общее количество способов вынуть 2 шара из 10. Это число сочетаний: $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ Теперь найдем количество способов вынуть именно 2 белых шара

из 6 имеющихся: $m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Вероятность того, что оба шара белые:
 $P = 15/45 = 1/3 \approx 0.333$.

Решение задачи по формуле Байеса Обозначим гипотезы: H_1 — лампа с 1-го завода, H_2 — лампа со 2-го завода. Их вероятности: $P(H_1) = 0.7$, $P(H_2) = 0.3$. Условные вероятности брака (событие A): $P(A|H_1) = 0.05$, $P(A|H_2) = 0.1$. Найдем общую вероятность брака $P(A)$ по формуле полной вероятности: $P(A) = 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.035 + 0.03 = 0.065$. Теперь по формуле Байеса найдем шанс того, что брак именно со второго завода: $P(H_2|A) = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.065} = \frac{0.03}{0.065} \approx 0.46$.

Варианты заданий

Каждый вариант содержит две задачи: (а) на классическую вероятность и (б) на формулу Байеса.

№	(а) Шары в урне (Белых/Черных), вынимают 2. Вероятность, что оба белые.	(б) Доля продукции заводов (Завод 1 / Завод 2) и их % брака. Лампа бракованная. Вероятность, что с Завода 2.
1	Белых: 5, Черных: 5	Завод 1: 60% (брак 2%), Завод 2: 40% (брак 3%)
2	Белых: 7, Черных: 3	Завод 1: 50% (брак 1%), Завод 2: 50% (брак 5%)
3	Белых: 8, Черных: 2	Завод 1: 80% (брак 4%), Завод 2: 20% (брак 8%)
4	Белых: 4, Черных: 6	Завод 1: 40% (брак 5%), Завод 2: 60% (брак 2%)
5	Белых: 9, Черных: 3	Завод 1: 75% (брак 3%), Завод 2: 25% (брак 6%)
6	Белых: 3, Черных: 7	Завод 1: 30% (брак 10%), Завод 2: 70% (брак 2%)
7	Белых: 6, Черных: 2	Завод 1: 90% (брак 1%), Завод 2: 10% (брак 5%)
8	Белых: 10, Черных: 5	Завод 1: 20% (брак 8%), Завод 2: 80% (брак 3%)

<i>№</i>	<i>(а) Шары в урне (Белых/Черных), вынимают 2. Вероятность, что оба белые.</i>	<i>(б) Доля продукции заводов (Завод 1 / Завод 2) и их % брака. Лампа бракованная. Вероятность, что с Завода 2.</i>
9	Белых: 5, Черных: 3	Завод 1: 55% (брак 4%), Завод 2: 45% (брак 4%)
10	Белых: 12, Черных: 4	Завод 1: 65% (брак 2%), Завод 2: 35% (брак 7%)
11	Белых: 7, Черных: 5	Завод 1: 45% (брак 3%), Завод 2: 55% (брак 5%)
12	Белых: 4, Черных: 4	Завод 1: 50% (брак 2%), Завод 2: 50% (брак 8%)
13	Белых: 8, Черных: 4	Завод 1: 70% (брак 1%), Завод 2: 30% (брак 4%)
14	Белых: 6, Черных: 6	Завод 1: 35% (брак 5%), Завод 2: 65% (брак 1%)
15	Белых: 11, Черных: 3	Завод 1: 85% (брак 2%), Завод 2: 15% (брак 10%)
16	Белых: 5, Черных: 2	Завод 1: 25% (брак 12%), Завод 2: 75% (брак 4%)
17	Белых: 9, Черных: 5	Завод 1: 40% (брак 6%), Завод 2: 60% (брак 3%)
18	Белых: 7, Черных: 7	Завод 1: 60% (брак 3%), Завод 2: 40% (брак 6%)
19	Белых: 10, Черных: 2	Завод 1: 95% (брак 1%), Завод 2: 5% (брак 20%)
20	Белых: 4, Черных: 2	Завод 1: 10% (брак 15%), Завод 2: 90% (брак 1%)

Методические рекомендации

- Проверка суммы вероятностей:** В задачах на формулу Байеса сумма вероятностей всех гипотез (например, $P(H_1) + P(H_2)$) всегда должна быть равна **1** (или 100%).
- Дерево вероятностей:** Если задача кажется сложной, нарисуйте схему («дерево»). Из одной точки выходят ветки-гипотезы, а из них — ветки

событий (брак/не брак). Вероятность пути — это произведение чисел на ветках.

3. **Логика ответа:** Если вероятность получилась больше 1 или меньше 0 — это сигнал о грубой ошибке в расчетах. Вероятность брака с конкретного завода не может быть больше общей вероятности брака в задаче.

Критерии оценки задания

- **Классическая модель:** Правильное использование комбинаторики (число сочетаний) для подсчета общего количества исходов.
- **Полная вероятность:** Верное составление уравнения, учитывающего все возможные источники события.
- **Применение теоремы Байеса:** Понимание того, какое значение идет в числитель (интересующая нас ветка), а какое в знаменатель (сумма всех веток).
- **Точность расчетов:** Округление до 2-3 знаков после запятой и корректная работа с процентами (перевод их в десятичные дроби).

Ниже представлено расчетное задание №5 по разделу «Случайные величины». Это завершающая работа курса, объединяющая навыки расчетов и логического анализа данных.

Задание №5. Случайные величины и математическая статистика

Теоретический материал для решения задания

Дискретная случайная величина (ДСВ) — это величина, которая в результате опыта может принять одно из заранее известных значений (например, количество выпавших «орлов» или число бракованных деталей).

- 1. Закон распределения:** Обычно представляется в виде таблицы. В верхней строке — значения x_i , в нижней — их вероятности p_i .
 - *Важнейшее свойство:* Сумма всех вероятностей в таблице всегда равна 1. Если сумма не равна 1, значит, допущена ошибка.
- 2. Математическое ожидание ($M[X]$):** Это «среднее» значение, которое мы ожидаем получить. $M[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$
- 3. Дисперсия ($D[X]$):** Показывает, насколько сильно значения «разбросаны» вокруг среднего. Чем больше дисперсия, тем менее предсказуема величина. $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$ Где $M[X^2] = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \dots + x_n^2p_n$.
- 4. Среднее квадратичное отклонение ($\sigma[X]$):** Тоже показывает разброс, но в тех же единицах, что и сама величина. $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$

Решение варианта №0 (Образец)

Условие: Случайная величина X задана законом распределения. Найти пропущенную вероятность p , вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

X	1	2	4	5
P	0.1	p	0.5	0.1

Нахождение неизвестной вероятности p Так как сумма всех вероятностей равна 1, составим уравнение: $0.1 + p + 0.5 + 0.1 = 1 \Rightarrow p + 0.7 = 1 \Rightarrow p = 0.3$.

Вычисление математического ожидания $M[X] = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.1 = 0.1 + 0.6 + 2.0 + 0.5 = 3.2$.

Вычисление дисперсии Сначала найдем средний квадрат: $M[X^2] = 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.5 + 5^2 \cdot 0.1 = 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.5 + 25 \cdot 0.1$

$M[X^2] = 0.1 + 1.2 + 8.0 + 2.5 = 11.8$. Теперь находим дисперсию: $D[X] = 11.8 - (3.2)^2 = 11.8 - 10.24 = 1.56$.

Вычисление среднего квадратичного отклонения $\sigma[X] = \sqrt{1.56} \approx 1.25$.

Варианты заданий

В каждом варианте найдите неизвестную вероятность p , а затем вычислите $M[X]$, $D[X]$ и $\sigma[X]$.

N°	$x_1 (p_1)$	$x_2 (p_2)$	$x_3 (p_3)$	$x_4 (p_4)$
1	0 (0.2)	1 (0.4)	2 (p)	3 (0.1)
2	2 (0.1)	4 (0.3)	6 (0.4)	8 (p)
3	-1 (0.2)	0 (0.5)	1 (p)	2 (0.1)
4	10 (0.4)	20 (p)	30 (0.2)	40 (0.1)
5	1 (0.1)	3 (0.1)	5 (0.5)	7 (p)
6	0 (p)	2 (0.3)	4 (0.3)	6 (0.2)
7	-2 (0.1)	1 (0.2)	3 (p)	5 (0.3)
8	5 (0.3)	10 (0.3)	15 (0.2)	20 (p)
9	1 (0.2)	2 (0.2)	3 (0.2)	4 (p)
10	-5 (0.1)	0 (p)	5 (0.4)	10 (0.2)
11	3 (0.4)	6 (0.2)	9 (p)	12 (0.1)
12	0 (0.1)	5 (p)	10 (0.3)	15 (0.2)
13	1 (0.25)	2 (0.25)	3 (0.25)	4 (p)
14	-3 (0.3)	-1 (0.3)	1 (0.3)	3 (p)
15	2 (0.2)	4 (p)	8 (0.2)	16 (0.2)
16	0 (0.5)	1 (0.2)	2 (0.2)	3 (p)
17	10 (0.1)	11 (0.1)	12 (0.1)	13 (p)
18	-2 (p)	-1 (0.4)	1 (0.2)	2 (0.1)
19	1 (0.1)	2 (0.2)	3 (0.3)	4 (p)
20	4 (0.3)	5 (0.4)	6 (p)	7 (0.1)

Методические рекомендации

5. **Проверка единицы:** Перед началом расчетов всегда складывайте вероятности. Если p получается отрицательным или больше 1 — ищите ошибку в условии или сложении.
6. **Отрицательные значения:** Если в верхней строке таблицы (x_i) есть отрицательные числа, математическое ожидание тоже может быть отрицательным. Но дисперсия $D[X]$ всегда должна быть положительной.
7. **Квадраты:** При вычислении $M[X^2]$ возводятся в квадрат только верхние числа (x_i), вероятности (p_i) остаются прежними.
8. **Округление:** Округляйте итоговое отклонение $\sigma[X]$ до двух знаков после запятой.

Критерии оценки задания

- **Логика распределения:** Понимание условия нормировки вероятностей (сумма равна 1).
- **Вычислительная культура:** Отсутствие арифметических ошибок в рядах произведений.
- **Соблюдение формул:** Корректное использование формул для центральных моментов (математическое ожидание и дисперсия).
- **Интерпретация результатов:** Правильное извлечение корня для получения стандартного отклонения.

Таблица 1 — Определение номера варианта расчётной работы

№ варианта	№ задач					№ варианта	№ задач				
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5		Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
00	10	9	10	8	9	50	20	5	6	15	5
01	4	16	6	8	17	51	18	11	18	13	16
02	10	1	18	2	15	52	8	19	18	19	14
03	17	17	18	15	4	53	16	17	1	4	10
04	17	16	12	10	20	54	9	4	3	16	15
05	16	6	11	18	5	55	17	11	15	20	7
06	13	4	19	2	5	56	5	15	10	1	16
07	1	18	16	17	15	57	4	2	12	19	6
08	5	17	19	1	8	58	8	3	13	6	19
09	8	9	18	7	12	59	13	2	18	7	5
10	17	10	4	7	18	60	14	20	13	11	8
11	14	8	1	12	11	61	13	15	2	9	11
12	10	13	9	19	10	62	12	12	17	7	13
13	6	9	3	3	20	63	14	9	18	7	3
14	16	3	17	18	20	64	18	1	4	9	1
15	15	7	3	8	8	65	17	5	13	17	6
16	5	6	15	20	13	66	8	10	16	17	17
17	2	15	9	9	16	67	6	4	17	16	12
18	7	2	3	3	3	68	16	3	7	7	14
19	18	9	9	11	13	69	11	12	7	3	15
20	13	11	14	14	14	70	17	15	2	8	13
21	7	2	13	20	8	71	12	11	3	3	14
22	6	18	3	14	12	72	3	18	3	9	3
23	7	14	1	11	12	73	8	16	12	1	19
24	5	3	6	19	9	74	9	12	13	16	15
25	10	8	3	9	16	75	5	14	17	1	11
26	11	9	8	8	9	76	20	19	4	17	13
27	3	2	3	8	10	77	10	5	1	1	10
28	15	20	12	8	19	78	6	12	5	14	18

Продолжение Таблицы 1.

№ варианта	№ задач					№ варианта	№ задач				
	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5		Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
29	17	15	12	16	18	79	7	5	4	17	3
30	14	2	8	18	14	80	18	20	19	18	3
31	2	8	1	18	20	81	12	9	1	2	14
32	10	1	14	18	9	82	3	6	6	7	4
33	3	4	4	10	15	83	14	8	7	7	3
34	11	1	7	13	5	84	6	14	4	19	15
35	1	15	4	2	19	85	13	15	18	4	6
36	11	8	11	6	9	86	20	4	4	11	19
37	10	3	12	14	19	87	17	13	1	8	1
38	12	6	19	18	6	88	18	7	20	3	6
39	2	1	3	10	6	89	15	6	18	12	16
40	13	16	8	15	4	90	4	12	13	16	19
41	7	19	3	11	15	91	17	19	4	17	15
42	14	8	14	10	1	92	13	11	3	20	20
43	2	15	4	15	15	93	2	17	9	18	10
44	13	13	13	12	11	94	13	2	12	4	20
45	10	6	15	16	16	95	2	19	16	9	17
46	7	1	18	20	7	96	15	6	2	2	9
47	3	8	2	14	18	97	11	5	5	11	15
48	20	4	10	11	8	98	19	6	17	5	7
49	13	2	19	3	7	99	7	6	18	8	4