

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Бугульминский филиал

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования

«Казанский национальный исследовательский технологический  
университет»

Хакимова А.А.

**РАСЧЕТНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ**  
**2 СЕМЕСТР**  
**«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»**

*для направления 18.03.01 «Химическая технология»  
(бакалавриат)*

Бугульма, 2026

## Содержание

РАЗДЕЛ 1. РАСЧЁТНЫЕ РАБОТЫ .....	3
РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 5. Неопределённый интеграл .....	3
РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 6. Определённый интеграл и его приложения .....	9
РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....	15
РАЗДЕЛ 2. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	20
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5. Интегральное исчисление функции одной переменной.....	20
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....	25
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №7. Интегрирование функций нескольких переменных .....	30
РАЗДЕЛ 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ .....	35
Приложения .....	37
Приложение №1 .....	37

## РАЗДЕЛ 1. РАСЧЁТНЫЕ РАБОТЫ

Номер варианта расчётной работы определяется по двум последним цифрам номера зачётной книжки и выбирается в соответствии с Приложением 1.

### РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 5. Неопределённый интеграл

---

#### ЦЕЛЬ РАСЧЁТНОЙ РАБОТЫ

Целью данной работы является:

Формирование общепрофессиональной компетенции **ОПК-2**: способность использовать математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

Овладение основными методами интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки (замена переменной) и интегрирование по частям.

Изучение алгоритмов интегрирования рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных функций.

Применение аппарата интегрального исчисления для восстановления функций состояния химических систем по их скоростным характеристикам.

Развитие навыков алгоритмизации аналитических вычислений.

---

#### СТРУКТУРА ЗАДАНИЙ

Задача 1. Непосредственное интегрирование и метод подведения под знак дифференциала

1.  $\int (3x^2 - 5x + 4)dx$

2.  $\int \frac{dx}{2x+3}$

3.  $\int e^{5x-1}dx$

4.  $\int \sin(3x)dx$

5.  $\int \frac{x dx}{x^2+1}$

6.  $\int \sqrt{3x+2}dx$

7.  $\int \frac{dx}{\cos^2(4x)}$

8.  $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$

9.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$
  10.  $\int x e^{x^2} dx$
  11.  $\int \frac{dx}{x \ln x}$
  12.  $\int \cos(2x - 5) dx$
  13.  $\int (2x + 1)^{10} dx$
  14.  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$
  15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
  16.  $\int \operatorname{tg} x dx$
  17.  $\int \frac{dx}{9x^2+4}$
  18.  $\int \frac{x^2 dx}{x^3+8}$
  19.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$
  20.  $\int \frac{dx}{\sin^2(x/2)}$
- 

Задача 2. Метод интегрирования по частям

1.  $\int x e^x dx$
2.  $\int x \sin x dx$
3.  $\int x \cos(2x) dx$
4.  $\int \ln x dx$
5.  $\int x^2 \ln x dx$
6.  $\int \arcsin x dx$
7.  $\int (2x + 1) e^x dx$
8.  $\int x^2 \cos x dx$
9.  $\int e^x \sin x dx$
10.  $\int \operatorname{arctg} x dx$
11.  $\int x 3^x dx$
12.  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
13.  $\int x^2 e^{-x} dx$
14.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$
15.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$
16.  $\int \ln^2 x dx$
17.  $\int (x - 2) \sin x dx$
18.  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$
19.  $\int x \cos^2 x dx$

$$20. \int e^{2x} \cos x dx$$

---

Задача 3. Интегрирование рациональных дробей

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2. \int \frac{xdx}{(x-1)(x-2)}$$

$$3. \int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{x^2-1}$$

$$6. \int \frac{3x-1}{x^2-4} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$8. \int \frac{x+3}{x^2+2x} dx -$$

$$9. \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx -$$

$$10. \int \frac{x^3 dx}{x-2}$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2+4x+3}$$

$$12. \int \frac{xdx}{x^2-1} \quad \text{¶}$$

$$13. \int \frac{dx}{x^3+x}$$

$$14. \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$$

$$15. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$$

$$16. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$17. \int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2+6x+13}$$

$$19. \int \frac{xdx}{x^2+x+1}$$

$$20. \int \frac{x^4}{x^2-4} dx$$

---

Задача 4. Интегрирование тригонометрических функций

$$1. \int \sin^2 x dx$$

2.  $\int \cos^3 x dx$
3.  $\int \sin x \cos^2 x dx$
4.  $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
5.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
6.  $\int \sin(3x)\cos(5x) dx$
7.  $\int \cos^4 x dx$
8.  $\int \frac{dx}{\sin x}$
9.  $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$
10.  $\int \frac{dx}{\cos x + 2}$
11.  $\int \cos^2(3x) dx$
12.  $\int \sin^5 x dx$
13.  $\int \sin(2x)\sin(4x) dx$
14.  $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
15.  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$
16.  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
17.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$
18.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
19.  $\int \cos x \cos(2x) dx$
20.  $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

Задача 5. Интегрирование иррациональных функций

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
2.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$
3.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$
5.  $\int \sqrt{1-x^2} dx$
6.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$
7.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
9.  $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$
10.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+9)}}$
12.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$
13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$
14.  $\int x\sqrt{x-5} dx$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$
17.  $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$
18.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
19.  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$
20.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

### ВАРИАНТ 0 (ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ)

Задача 1. Подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx.$$

**Решение:**

Заметим, что  $d(x^3 + 1) = 3x^2 dx$ .

Тогда  $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 1)$ .

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C.$$

Задача 2. Интегрирование по частям

$$\int x e^{2x} dx.$$

**Решение:**

Пусть  $u = x \Rightarrow du = dx$ ;  $dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$ .

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

Задача 3. Рациональные дроби

$$\int \frac{dx}{x^2-4}.$$

**Решение:**

Разложим дробь:  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$ .

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left( \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$$

Задача 4. Тригонометрия

$$\int \sin^2 x dx.$$

**Решение:**

Используем формулу понижения степени  $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ .

$$\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Задача 5. Иррациональность

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

**Решение:**

Замена  $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2, dx = 2t dt$ .

$$\int \frac{2t dt}{t(t^2+1)} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctg t + C = 2 \arctg \sqrt{x} + C.$$

## РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 6. Определённый интеграл и его приложения

---

### ЦЕЛЬ РАСЧЁТНОЙ РАБОТЫ

Целью данной работы является:

Формирование общепрофессиональной компетенции **ОПК-2**: способность использовать математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

Овладение методами вычисления определённых интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница.

Изучение геометрических приложений определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.

Освоение методов решения прикладных задач (физический смысл интеграла), что необходимо для расчёта работы расширения газов и тепловых эффектов в химической инженерии.

Развитие навыков оценки сходимости несобственных интегралов.

---

### СТРУКТУРА ЗАДАНИЙ

Задача 1. Вычислить определённый интеграл

1.  $\int_1^2 (x^2 + 2x) dx$

2.  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

3.  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

4.  $\int_1^e \frac{dx}{x}$

5.  $\int_0^2 e^{x/2} dx$

6.  $\int_0^{\pi} \cos(x/2) dx$

7.  $\int_4^9 \sqrt{x} dx$

8.  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}$

9.  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

10.  $\int_0^3 (3x - 1)^2 dx$

11.  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

12.  $\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$

$$13. \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$$

$$14. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2/4}}$$

$$15. \int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$$

$$16. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$$

$$17. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx$$

$$18. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$$

$$19. \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$

Задача 2. Вычислить определённый интеграл методами подстановки или по частям

$$1. \int_0^1 x e^x dx$$

$$2. \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$3. \int_1^e \ln x dx$$

$$4. \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$5. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$6. \int_1^2 x \ln x dx$$

$$7. \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

$$8. \int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{1+x^2} dx$$

$$9. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$$

$$11. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$$

$$12. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$13. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$$

$$14. \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$15. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$$

$$16. \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsin} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$17. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3+1}$$

$$18. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$

$$19. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$20. \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$$

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1.  $y = x^2, y = x + 2$
2.  $y = x^2, y = 4$
3.  $y = 4 - x^2, y = 0$
4.  $y = x^3, y = x$
5.  $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$
6.  $y = 1/x, y = 0, x = 1, x = e$
7.  $y = \sqrt{x}, y = x$
8.  $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$
9.  $y = x^2 - 1, y = 0$
10.  $y = 2x - x^2, y = 0$
11.  $y = x^2, y = 2x$
12.  $y = x^2 + 1, y = 2$
13.  $y = \ln x, y = 0, x = e$
14.  $y = x^2, y = \sqrt{x}$
15.  $y = 4x - x^2, y = x$
16.  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$
17.  $y = 1 - x^2, y = x - 1$
18.  $y = \cos x, y = 0, x = -\pi/2, x = \pi/2$
19.  $y = x^2 + 2, y = 1 - x, x = 0, x = 1$
20.  $y = x^2 - 4x + 3, y = 0$

Задача 4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси  $Ox$

1.  $y = x^2, y = 0, x = 1$
2.  $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$
3.  $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$
4.  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$
5.  $y = x^3, y = 0, x = 2$
6.  $y = 1/x, y = 0, x = 1, x = 2$
7.  $y = 2x - x^2, y = 0$
8.  $y = 4 - x^2, y = 0$

9.  $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e$
10.  $y = \sqrt{x+1}, y = 0, x = 3$
11.  $y = x^2, y = x$
12.  $y = \cos x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi/2$
13.  $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 2$
14.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0$
15.  $y = x + 1, y = 0, x = 0, x = 2$
16.  $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 1$
17.  $y = \sqrt{x}e^x, y = 0, x = 1$
18.  $y = 1/(1+x^2), y = 0, x = 0, x = 1$
19.  $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = \pi/4$
20.  $y = x\sqrt{4-x^2}, y = 0$

Задача 5. Исследовать на сходимость и вычислить несобственный интеграл

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$
2.  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$
3.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$
4.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
5.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
6.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
7.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$
8.  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$
9.  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$
10.  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
11.  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx$
12.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$
13.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
14.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$
15.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$
16.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
17.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$

18.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$

19.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$

20.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

**ВАРИАНТ 0 (ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ)**

Задача 1. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_0^1 (4x^3 - 1) dx.$$

**Решение:**

Находим первообразную:

$$F(x) = x^4 - x.$$

$$\int_0^1 (4x^3 - 1) dx = [x^4 - x]_0^1 = (1^4 - 1) - (0^4 - 0) = 0 - 0 = 0.$$

Задача 2. Интегрирование по частям

$$\int_1^e \ln x dx.$$

**Решение:**Пусть  $u = \ln x \Rightarrow du = dx/x$ ;  $dv = dx \Rightarrow v = x$ .

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e \ln e - 1 \ln 1) - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

Задача 3. Площадь фигуры

Найти площадь фигуры, ограниченной  $y = x^2$  и  $y = x$ .**Решение:**

Находим точки пересечения:

$$x^2 = x \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

На  $[0,1]$  имеем  $x \geq x^2$ .

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 0.167.$$

Задача 4. Объем тела вращения

 $y = \sqrt{x}$  от  $x = 0$  до  $x = 4$  вокруг оси  $Ox$ .

**Решение:**

$$V_x = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25.13.$$

Задача 5. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

**Решение:**

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (-e^{-B} + e^0) = 0 + 1 = 1.$$

Интеграл сходится.

---

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**Порядок выполнения:** Построение чертежа для задач 3 и 4 является обязательным этапом для корректного определения пределов интегрирования.

**Контроль:** При вычислении объемов результат не может быть отрицательным. Наличие множителя  $\pi$  обязательно.

**Критерии:** Правильный выбор пределов интегрирования — 50% успеха задачи. Расчетная работа б оценивается в рамках промежуточной аттестации (экзамена).

## РАСЧЁТНАЯ РАБОТА № 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

---

### ЦЕЛЬ РАСЧЁТНОЙ РАБОТЫ

Целью данной работы является:

Формирование общепрофессиональной компетенции **ОПК-2**: способность использовать математические методы для решения задач профессиональной деятельности.

Овладение методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого и второго порядков.

Применение аппарата ОДУ для моделирования кинетики химических реакций, процессов тепломассообмена и динамики изменения концентраций веществ.

Развитие навыков нахождения частных решений при заданных начальных условиях (задача Коши).

Изучение аналитических методов решения линейных однородных и

---

### СТРУКТУРА ЗАДАНИЙ

Задача 1. Решить ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными

1.  $y' = x^2y$
2.  $x dy = y dx$
3.  $y' \cos x = y \sin x$
4.  $y' = e^{x+y}$
5.  $(1 + x^2) dy = x dx$
6.  $y' \sqrt{1 - x^2} = 1$
7.  $y^2 y' = x^2$
8.  $y' = y/x$
9.  $dy = (x + 1) dx$
10.  $y' = 2xy^2$
11.  $e^x dx + y dy = 0$
12.  $\sqrt{y} dx = x dy$
13.  $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$
14.  $x^3 dy = y dx$
15.  $y' = e^{-y} \sin x$
16.  $dy/dx = (y + 1)/(x - 1)$

17.  $x dy + y dx = 0$
  18.  $y' = (1 + y^2)/(1 + x^2)$
  19.  $\ln x dy = y dx$
  20.  $y' = \sqrt{y/x}$
- 

Задача 2. Решить линейное ОДУ первого порядка

1.  $y' - \frac{y}{x} = x^2$
  2.  $y' + y = e^x$
  3.  $y' + 2xy = x$
  4.  $xy' + y = \ln x$
  5.  $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$
  6.  $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$
  7.  $x^2 y' + xy = 1$
  8.  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$
  9.  $y' - y = x$
  10.  $y' + 3y = e^{-2x}$
  11.  $xy' - 2y = 2x^4$
  12.  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$
  13.  $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$
  14.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$
  15.  $xy' + y = x + 1$
  16.  $y' + y = x e^{-x}$
  17.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$
  18.  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^3}$
  19.  $y' + 2y = e^x$
  20.  $xy' + y = e^x$
- 

Задача 3. Решить задачу Коши для ОДУ второго порядка (допускающие понижение порядка)

1.  $y'' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 0$
2.  $y'' = 1/x, y(1) = 0, y'(1) = 1$
3.  $y'' = e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1$
4.  $y'' = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 2$
5.  $y'' = \cos 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0$
6.  $y'' = \sqrt{x}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

7.  $y'' = 1/(1 + x^2), y(0) = 0, y'(0) = 1$
  8.  $y'' = 6x, y(1) = 2, y'(1) = 3$
  9.  $y'' = \ln x, y(1) = 1, y'(1) = 0$
  10.  $y'' = 1/\cos^2 x, y(0) = 1, y'(0) = 0$
  11.  $y'' = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$
  12.  $y'' = 1/(x + 1)^3, y(0) = 1, y'(0) = 0$
  13.  $y'' = \sin 3x, y(0) = 0, y'(0) = 1$
  14.  $y'' = 12x^2, y(1) = 1, y'(1) = 2$
  15.  $y'' = 4\cos 2x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
  16.  $y'' = \sinh x, y(0) = 0, y'(0) = 1$
  17.  $y'' = 2/x^3, y(1) = 1, y'(1) = 0$
  18.  $y'' = e^x + 1, y(0) = 2, y'(0) = 1$
  19.  $y'' = \operatorname{arctg} x, y(0) = 0, y'(0) = 0$
  20.  $y'' = 1/\sqrt{1 - x^2}, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- 

1. Задача 4. Решить линейное однородное ОДУ второго порядка

2.  $y'' - 5y' + 6y = 0$
  3.  $y'' + 4y' + 4y = 0$
  4.  $y'' + y = 0$
  5.  $y'' - 4y' + 13y = 0$
  6.  $y'' - 3y' = 0$
  7.  $y'' + 2y' + 5y = 0$
  8.  $y'' - 4y = 0$
  9.  $y'' + 6y' + 9y = 0$
  10.  $y'' - y' - 2y = 0$
  11.  $y'' + 16y = 0$
  12.  $y'' + 5y' + 4y = 0$
  13.  $y'' - 10y' + 25y = 0$
  14.  $y'' + 4y' + 5y = 0$
  15.  $y'' - 9y = 0$
  16.  $y'' - 2y' + 10y = 0$
  17.  $y'' + 3y' + 2y = 0$
  18.  $y'' - 8y' + 16y = 0$
  19.  $y'' + 25y = 0$
  20.  $y'' - 7y' + 12y = 0$
  21.  $y'' + 6y' + 13y = 0$
- 

Задача 5. Решить линейное неоднородное ОДУ второго порядка

1.  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
2.  $y'' + y = x^2 + 1$
3.  $y'' - 4y' + 4y = \sin x$
4.  $y'' + 4y = e^x$
5.  $y'' - 2y' = x^2$
6.  $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
7.  $y'' - 5y' + 6y = 12x$
8.  $y'' + 9y = \cos 2x$
9.  $y'' - y = e^x$
10.  $y'' + 4y' + 3y = e^{2x}$
11.  $y'' - 4y' + 13y = 26$
12.  $y'' + y' = \sin 2x$
13.  $y'' - 6y' + 9y = x^2$
14.  $y'' - 4y = e^{2x}$
15.  $y'' + y = \cos x$
16.  $y'' + 2y' + 5y = 10x$
17.  $y'' - 3y' = e^{3x}$
18.  $y'' + 16y = \sin 4x$
19.  $y'' - 2y' + y = x + 1$
20.  $y'' - y = 5$

## ВАРИАНТ 0 (ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ)

Задача 1. Разделение переменных

**Задание:**  $y' = y/x$ . **Решение:**  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ . Интегрируем:  $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx$ .

Задача 2. Линейное ОДУ 1-го порядка

**Задание:**  $y' + y = x$ . **Решение:** Пусть  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ .  $u'v + u(v' + v) = x$ .

$$v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow v = e^{-x}.$$

$$u'e^{-x} = x \Rightarrow u' = xe^x \Rightarrow u = \int xe^x dx = (x-1)e^x + C. \quad y = ((x-1)e^x + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Задача 3. Задача Коши

**Задание:**  $y'' = 12x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ . **Решение:**  $y' = \int 12x dx = 6x^2 + C_1$ . Из  $y'(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$ .  $y = \int (6x^2 + 2) dx = 2x^3 + 2x + C_2$ . Из  $y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$ . Ответ:  $y = 2x^3 + 2x + 1$ .

Задача 4. Однородное ОДУ 2-го порядка

**Задание:**  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . **Решение:**  $k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow (k - 1)(k - 3) = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 3$ . Ответ:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ .

Задача 5. Неоднородное ОДУ 2-го порядка

**Задание:**  $y'' + y = e^x$ . **Решение:** 1)  $y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  (т.к.  $k^2 + 1 = 0, k = \pm i$ ). 2) Частное решение  $y^* = Ae^x$ . Подставим:  $Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = 0.5$ . Общее решение:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 0.5e^x$ .

---

## МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**Алгоритм:** Всегда начинайте решение ЛНОДУ (задача 5) с нахождения общего решения соответствующего однородного уравнения.

**Особые случаи:** В задаче 5 при совпадении вида правой части с решением однородного уравнения (резонанс) используйте множитель  $x^k$ .

**Критерии:** Правильное решение задачи Коши требует верного нахождения и общего решения, и констант. Оценка "зачтено" — при 4 верно решенных задачах.

## РАЗДЕЛ 2. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Номер варианта контрольной работы определяется по двум последним цифрам номера зачётной книжки и выбирается в соответствии с Приложением 1.

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5. Интегральное исчисление функции одной переменной

**Цель работы:** Проверка навыков нахождения неопределённых интегралов различными методами, умения вычислять определённые интегралы и применять их для решения геометрических задач (вычисление площадей и объёмов).

#### Формируемая компетенция:

**ОПК-2:** Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

#### Индикаторы достижения компетенции:

**ОПК-2.1:** Знает основы интегрального исчисления функции одной переменной.

**ОПК-2.2:** Умеет использовать методы интегрирования для решения математических задач.

**ОПК-2.3:** Владеет навыками использования математического аппарата при решении типовых задач.

#### Рейтинговая оценка:

---

#### ЗАДАЧА 1. Неопределённые интегралы (табличное интегрирование)

*Вычислите неопределённые интегралы, используя свойства интегралов и таблицу основных интегралов.*

1.  $\int (x^4 - 3x^2 + 5)dx$
2.  $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})dx$
3.  $\int (2\sin x - 3\cos x)dx$
4.  $\int (e^x + \frac{5}{x})dx$
5.  $\int (3^x - \frac{2}{\cos^2 x})dx$
6.  $\int \frac{x^2-1}{x}dx$

7.  $\int (1 - 2x)^2 dx$
8.  $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}) dx$
9.  $\int \frac{dx}{x^2+9}$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
11.  $\int \frac{dx}{x^2-16}$
12.  $\int (5\cos x + \frac{1}{\sin^2 x}) dx$
13.  $\int (\frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}) dx$
14.  $\int \frac{x^3+2x^2-x}{x^2} dx$
15.  $\int (2^x \cdot 3^x) dx$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$
17.  $\int (\tan^2 x + 1) dx$
18.  $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx$  (методом разложения на слагаемые)
19.  $\int (x - 1)(x + 2) dx$
20.  $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}) dx$

## ЗАДАЧА 2. Метод подстановки (замена переменной)

Вычислите неопределённые интегралы, используя метод введения новой переменной.

1.  $\int \sin(5x - 2) dx$
2.  $\int e^{3x+4} dx$
3.  $\int \frac{dx}{2x+7}$
4.  $\int (4x - 1)^{10} dx$
5.  $\int \sqrt{2x + 3} dx$
6.  $\int x \cdot e^{x^2} dx$
7.  $\int \frac{xdx}{x^2+1}$
8.  $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$
9.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$
10.  $\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$
11.  $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$
12.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$
13.  $\int \frac{\arctan x dx}{1+x^2}$

14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
15.  $\int \frac{x^2 dx}{x^3-8}$
16.  $\int \sin\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$
17.  $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
18.  $\int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$
19.  $\int x\sqrt{x^2-4} dx$
20.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$

### ЗАДАЧА 3. Интегрирование по частям

*Вычислите неопределённые интегралы, используя формулу интегрирования по частям.*

1.  $\int x \sin x dx$
2.  $\int x e^x dx$
3.  $\int \ln x dx$
4.  $\int x \cos(2x) dx$
5.  $\int (2x+1)e^x dx$
6.  $\int x^2 \ln x dx$
7.  $\int \arcsin x dx$
8.  $\int \arctan x dx$
9.  $\int x 3^x dx$
10.  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
11.  $\int (x-2) \sin x dx$
12.  $\int x \ln(x+1) dx$
13.  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$
14.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$
15.  $\int x e^{-x} dx$
16.  $\int (3x-5) \cos x dx$
17.  $\int x^3 \ln x dx$
18.  $\int \ln(x^2+1) dx$
19.  $\int x \sin(3x) dx$
20.  $\int \frac{x dx}{e^x}$

#### ЗАДАЧА 4. Определённые интегралы

Вычислите определённые интегралы по формуле Ньютона-Лейбница.

1.  $\int_0^1 (x^2 - x) dx$
2.  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$
3.  $\int_0^\pi \sin x dx$
4.  $\int_0^{\ln 2} e^x dx$
5.  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$
6.  $\int_{-1}^1 (3x^2 + 2x) dx$
7.  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$
8.  $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$
9.  $\int_0^2 (x^3 - 4x) dx$
10.  $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$
11.  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
12.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13.  $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$
14.  $\int_0^1 (e^x + 1) dx$
15.  $\int_1^2 (2x - 3)^4 dx$
16.  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
17.  $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 1}$
18.  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx$
19.  $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$
20.  $\int_1^2 (x + \frac{1}{x^2}) dx$

---

#### ЗАДАЧА 5. Приложения определённого интеграла

Решите геометрические задачи на применение определённого интеграла.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = 4$ .
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$  и  $y = x$ .
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$ .
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 4x$  и  $y = 0$ .

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi/2$ .
6. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$ .
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = 0$ .
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = e$ .
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 1$  и  $y = 2$ .
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$  (одна полуволна) и осью  $Ox$ .
11. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2, y = 0, x = 2$ .
12. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$ .
13. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$ .
14. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$  от  $x = 0$  до  $x = \pi$ .
15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x, y = 0, x = 3$ .
16. Вычислить объем конуса, полученного вращением прямой  $y = x$  вокруг оси  $Ox$  на отрезке  $[0, H]$ .
17. Вычислить объем тела, полученного вращением параболы  $y^2 = x$  вокруг оси  $Ox$  от  $x = 0$  до  $x = 1$ .
18. Найти объем шара радиуса  $R$ , рассматривая его как тело вращения полукруга  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  вокруг оси  $Ox$ .
19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками  $y = x^2 - 1$  и  $y = 0$ .
20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = 2 - x$ .

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

**Цель работы:** Проверка умения определять типы дифференциальных уравнений, находить их общие и частные решения, а также решать системы линейных дифференциальных уравнений.

**Формируемая компетенция:**

**ОПК-2:** Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

**Индикаторы достижения компетенции:**

**ОПК-2.1:** Знает основы теории дифференциальных уравнений.

**ОПК-2.2:** Умеет решать уравнения и системы дифференциальных уравнений применительно к реальным процессам.

**ОПК-2.3:** Владеет навыками использования математического аппарата для решения типовых задач.

---

ЗАДАЧА 1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

*Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка.*

1.  $y' = \frac{x^2}{y}$

2.  $y' = 3x^2y$

3.  $x dx + y dy = 0$

4.  $y' = e^{x+y}$

5.  $y \ln y dx + x dy = 0$

6.  $y' = \frac{y}{x}$

7.  $x^2 y' + y = 0$

8.  $y' = \cos x \cdot \cos^2 y$

9.  $dy = (1 + y^2) dx$

10.  $y' = \sqrt{y} \cdot \sqrt{x}$

11.  $e^x dx - y dy = 0$

12.  $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

13.  $xy' = y^2 + 1$

14.  $y' = y \cdot \sin x$

15.  $(x + 1) dy - y dx = 0$

16.  $y' = e^x \cdot y^3$
17.  $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$
18.  $y' = 2x(y - 1)$
19.  $\sqrt{1 - x^2} dy + x dx = 0$
20.  $y' = \frac{y+1}{x-1}$

ЗАДАЧА 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Найдите общее решение линейного уравнения вида  $y' + P(x)y = Q(x)$ .

1.  $y' + \frac{y}{x} = x^2$
2.  $y' - y = e^{2x}$
3.  $y' + 2xy = x$
4.  $y' + y \cdot \tan x = \cos x$
5.  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$
6.  $y' + y = \sin x$
7.  $y' + 3y = e^{-x}$
8.  $xy' - 2y = 2x^4$
9.  $y' + \frac{y}{x} = \ln x$
10.  $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2 \sin x$
11.  $y' + 2y = 4x$
12.  $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^x}{x^2}$
13.  $y' - y = x$
14.  $y' + y = e^{-x}$
15.  $xy' + y = x + 1$
16.  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
17.  $y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin x$
18.  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^3}$
19.  $y' + y = x^2$
20.  $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$

ЗАДАЧА 3. Однородные линейные ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Найдите общее решение уравнения  $y'' + py' + qy = 0$ .

1.  $y'' - 5y' + 6y = 0$

2.  $y'' + 4y' + 3y = 0$
3.  $y'' - 4y' + 4y = 0$
4.  $y'' + 2y' + 5y = 0$
5.  $y'' - 9y = 0$
6.  $y'' + 16y = 0$
7.  $y'' - y' - 2y = 0$
8.  $y'' + 6y' + 9y = 0$
9.  $y'' + 2y' + 2y = 0$
10.  $y'' - 3y' = 0$
11.  $y'' + 5y' = 0$
12.  $y'' - 7y' + 10y = 0$
13.  $y'' + 4y = 0$
14.  $y'' - 4y' + 13y = 0$
15.  $y'' + 8y' + 16y = 0$
16.  $y'' - 2y' - 3y = 0$
17.  $y'' + y' - 6y = 0$
18.  $y'' - 6y' + 10y = 0$
19.  $y'' - 2y' + y = 0$
20.  $y'' + 25y = 0$

#### ЗАДАЧА 4. Неоднородные линейные ОДУ второго порядка

*Найдите общее решение уравнения с правой частью специального вида.*

1.  $y'' - 3y' + 2y = 2x$
2.  $y'' + y = x^2$
3.  $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$
4.  $y'' + 4y = \sin x$
5.  $y'' - 2y' + y = e^x$
6.  $y'' + 2y' = x - 1$
7.  $y'' - 5y' + 6y = 12$
8.  $y'' - y = \cos x$
9.  $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
10.  $y'' + 9y = 9x$
11.  $y'' - 4y' = 8x$
12.  $y'' + y' - 2y = 3e^x$
13.  $y'' - 6y' + 9y = 2x^2$
14.  $y'' + 4y' + 5y = 5x$
15.  $y'' - y' = e^{2x}$
16.  $y'' + 16y = \cos(4x)$
17.  $y'' - 2y' + 5y = 10$

$$18. y'' + 2y' + y = \sin(2x)$$

$$19. y'' - 3y' = e^{3x}$$

$$20. y'' - y = x + 1$$

---

### ЗАДАЧА 5. Системы дифференциальных уравнений

Решите систему линейных дифференциальных уравнений методом исключения.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = -3x - y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = y + e^t \\ \dot{y} = x + e^t \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 3y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = -x + 8y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x \end{cases}$$

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №7. Интегрирование функций нескольких переменных

**Цель работы:** Проверка умения вычислять двойные и тройные интегралы в декартовых и полярных координатах, а также применять их для нахождения площадей плоских фигур и объемов тел.

### Формируемая компетенция:

**ОПК-2:** Способен использовать математические, физические, физико-химические, химические методы для решения задач профессиональной деятельности.

### Индикаторы достижения компетенции:

**ОПК-2.1:** Знает основы интегрального исчисления функций нескольких переменных.

**ОПК-2.2:** Умеет использовать кратные интегралы для решения математических задач.

**ОПК-2.3:** Владеет навыками применения интегрального исчисления для вычисления геометрических характеристик объектов.

---

### ЗАДАЧА 1. Двойные интегралы в декартовых координатах

*Вычислите двойной интеграл по заданной области  $D$ .*

1.  $\iint_D (x + y) dx dy, D: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
2.  $\iint_D x^2 y dx dy, D: \{1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$
3.  $\iint_D (xy + y^2) dx dy, D: \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$
4.  $\iint_D e^{x+y} dx dy, D: \{0 \leq x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \ln 3\}$
5.  $\iint_D (x - y) dx dy, D: \{y \geq x^2, y \leq 1\}$
6.  $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, D: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
7.  $\iint_D y \cos(xy) dx dy, D: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
8.  $\iint_D (x + 2y) dx dy, D: \{y \geq x, y \leq 2x, x \leq 1\}$
9.  $\iint_D x \sin y dx dy, D: \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$
10.  $\iint_D \sqrt{xy} dx dy, D: \{1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 9\}$
11.  $\iint_D (2x + 3y^2) dx dy, D: \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
12.  $\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy, D: \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$
13.  $\iint_D e^y dx dy, D: \{y \geq x^2, y \leq x\}$

14.  $\iint_D (x + y)^2 dx dy, D: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
15.  $\iint_D \sin(x + y) dx dy, D: \{0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
16.  $\iint_D x y^2 dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
17.  $\iint_D (3x^2 - 2y) dx dy, D: \{0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$
18.  $\iint_D \frac{dx dy}{1+x+y}, D: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
19.  $\iint_D (x + y) dx dy, D$  ограничена  $y = x^2, y = \sqrt{x}$ .
20.  $\iint_D x y dx dy, D$  ограничена  $y = x, y = 0, x = 2$ .

## ЗАДАЧА 2. Переход к полярным координатам

Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам.

1.  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 4\}$
2.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
3.  $\iint_D d x dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 9\}$  (Площадь круга)
4.  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
5.  $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq \pi\}$
6.  $\iint_D y dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$
7.  $\iint_D x dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
8.  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2+y^2+1}, D: \{x^2 + y^2 \leq 4\}$
9.  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$
10.  $\iint_D (x + y) dx dy, D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$
11.  $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
12.  $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$
13.  $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$
14.  $\iint_D x y dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$
15.  $\iint_D \arctan(y/x) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
16.  $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2}, D: \{4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$
17.  $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$
18.  $\iint_D y^2 dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
19.  $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy, D: \{x^2 + y^2 \leq 4\}$
20.  $\iint_D \frac{y}{x} dx dy, D: \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

### ЗАДАЧА 3. Тройные интегралы

Вычислите тройной интеграл по заданной области  $V$ .

1.  $\iiint_V x y z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
2.  $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$
3.  $\iiint_V x^2 dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$
4.  $\iiint_V d x dy dz, V: \{x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
5.  $\iiint_V z dx dy dz, V: \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
6.  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$
7.  $\iiint_V e^{x+y+z} dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
8.  $\iiint_V y dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$
9.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}, V: \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$
10.  $\iiint_V x y dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}$
11.  $\iiint_V \sin z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \pi\}$
12.  $\iiint_V (x + y) z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
13.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x+y+z+1}}, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
14.  $\iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
15.  $\iiint_V z^2 dx dy dz, V: \{x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$
16.  $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
17.  $\iiint_V d x dy dz, V: \{x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$  (Объем цилиндра)
18.  $\iiint_V x dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$
19.  $\iiint_V y z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$
20.  $\iiint_V e^z dx dy dz, V: \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$

---

### ЗАДАЧА 4. Приложения кратных интегралов (Площади)

Вычислите площадь плоской области  $D$  с помощью двойного интеграла  $S = \iint_D d x dy$ .

1.  $D$  ограничена  $y = x^2$  и  $y = x + 2$ .
2.  $D$  ограничена  $y^2 = x$  и  $x = 4$ .
3.  $D$  ограничена  $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$ .
4.  $D$  ограничена  $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$ .
5.  $D$  ограничена  $y = \ln x, y = 0, x = e$ .
6.  $D$  ограничена  $x^2 + y^2 = 25$  и  $x^2 + y^2 = 9$ .
7.  $D$  ограничена  $y = 4 - x^2$  и  $y = 0$ .

8.  $D$  ограничена  $y = 1/x, y = x, x = 2$ .
9.  $D$  ограничена  $y^2 = 4x$  и  $y = x$ .
10.  $D$  ограничена  $x = 0, y = 0, x + y = 5$ .
11.  $D$  ограничена  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x$ .
12.  $D$  ограничена  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$ .
13.  $D$  ограничена  $y = 2 - x^2$  и  $y = x$ .
14.  $D$  ограничена  $y = 1/x^2, y = 0, x = 1, x = 2$ .
15.  $D$  ограничена  $x^2 + y^2 = 4x$  (в полярных координатах).
16.  $D$  ограничена  $r = 2\cos\phi$  (одна петля).
17.  $D$  ограничена  $y = x^3, y = 8, x = 0$ .
18.  $D$  ограничена  $y = \tan x, y = 0, x = \pi/4$ .
19.  $D$  ограничена  $y = |x|$  и  $y = 2$ .
20.  $D$  ограничена  $y = 2x - x^2$  и  $y = -x$ .

#### ЗАДАЧА 5. Приложения кратных интегралов (Объемы)

Вычислите объем тела  $V$  с помощью тройного интеграла  $V = \iiint_V dxdydz$ .

1. Тело ограничено плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0$  и  $x + y + z = 1$ .
2. Тело ограничено цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$  и плоскостями  $z = 0, z = 2$ .
3. Тело ограничено параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 4$ .
4. Тело ограничено конусом  $z^2 = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 1$ .
5. Тело ограничено цилиндром  $y = x^2$  и плоскостями  $y = 1, z = 0, z = 3$ .
6. Тело ограничено поверхностями  $z = xy, x = 0, y = 0, x = 1, y = 1, z = 0$ .
7. Тело ограничено сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (в первом октанте).
8. Тело ограничено цилиндром  $x^2 + y^2 = R^2$  и плоскостями  $z = 0, z = h$ .
9. Тело ограничено параболоидом  $z = 4 - x^2 - y^2$  и плоскостью  $z = 0$ .
10. Тело ограничено плоскостями  $x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0, z = x + y$ .
11. Тело ограничено эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .
12. Тело ограничено поверхностями  $z = 1 - x^2, y = 0, y = 2, z = 0$ .
13. Тело ограничено  $z = x^2 + y^2$  и  $z = 2 - x^2 - y^2$ .
14. Тело ограничено цилиндром  $x^2 + y^2 = 2x$  и плоскостями  $z = 0, z = x$ .
15. Тело ограничено  $y = \sqrt{x}, y = 1, x = 0, z = 0, z = 5$ .
16. Тело ограничено  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и  $x^2 + y^2 = 1$  (внутри цилиндра).
17. Тело ограничено  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $z = 2$ .
18. Тело ограничено  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 3, z = 4$  (параллелепипед).
19. Тело ограничено  $y = x, y = 0, x = 1, z = 0, z = x^2 + y^2$ .

20. Тело ограничено  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

### РАЗДЕЛ 3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

#### 1. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1. Функции нескольких переменных. Область определения.
2. Частные производные и их геометрический смысл.
3. Полный дифференциал функции.
4. Производная сложной функции нескольких переменных.
5. Градиент функции и его свойства.
6. Направленная производная.
7. Экстремум функции двух переменных.
8. Необходимые условия экстремума.
9. Достаточные условия экстремума.
10. Метод множителей Лагранжа.

#### 2. Неопределенный интеграл

11. Первообразная функция и неопределённый интеграл.
12. Основные свойства неопределённого интеграла.
13. Табличные интегралы.
14. Метод замены переменной.
15. Интегрирование по частям.
16. Интегрирование рациональных функций.
17. Интегрирование тригонометрических функций.
18. Интегрирование иррациональных выражений.

#### 3. Определённый интеграл

19. Определение определённого интеграла по Риману.
20. Геометрический смысл определённого интеграла.
21. Свойства определённого интеграла.
22. Формула Ньютона–Лейбница.
23. Замена переменной в определённом интеграле.
24. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
25. Несобственные интегралы первого рода.
26. Несобственные интегралы второго рода.
27. Площадь плоской фигуры.
28. Объём тела вращения.
29. Работа переменной силы.
30. Длина дуги кривой.,

#### 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

31. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение.
32. ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными.

33. Лине́йные ОДУ первого порядка.
  34. Одно́родные ОДУ первого порядка.
  35. Уравнение Бернулли.
  36. ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
  37. Характеристическое уравнение.
  38. Частные решения неоднородных ОДУ.
  39. Метод вариации постоянных.
  40. Системы дифференциальных уравнений.
5. Интегрирование функций нескольких переменных
41. Двойной интеграл: определение и геометрический смысл.
  42. Свойства двойного интеграла.
  43. Переход к повторному интегралу.
  44. Изменение порядка интегрирования.
  45. Тройной интеграл.
  46. Кратные интегралы в цилиндрических координатах.
  47. Кратные интегралы в сферических координатах.
  48. Применение кратных интегралов к вычислению объёмов.
6. Прикладные вопросы
49. Применение интегралов в механике и физике.
  50. Применение дифференциальных уравнений в химической кинетике.
  51. Математическое моделирование технологических процессов.
  52. Связь производной и интеграла.
  53. Численные методы интегрирования.
  54. Метод Эйлера для решения ОДУ.
  55. Погрешности вычислений и их оценка.
  56. Интерпретация экстремума в инженерных задачах.
  57. Применение кратных интегралов в расчётах масс.
  58. Моделирование процессов теплообмена.
  59. Дифференциальные уравнения роста и распада.
  60. Комплексное применение интегрального и дифференциального аппарата в инженерных расчётах.

## Приложения

### Приложение №1

Таблица 1 — Определение номера варианта расчётной и контрольной работы

№ варианта	№ задач					№ варианта	№ задач				
	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5		Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
<b>00</b>	10	9	10	8	9	<b>50</b>	20	5	6	15	5
<b>01</b>	4	16	6	8	17	<b>51</b>	18	11	18	13	16
<b>02</b>	10	1	18	2	15	<b>52</b>	8	19	18	19	14
<b>03</b>	17	17	18	15	4	<b>53</b>	16	17	1	4	10
<b>04</b>	17	16	12	10	20	<b>54</b>	9	4	3	16	15
<b>05</b>	16	6	11	18	5	<b>55</b>	17	11	15	20	7
<b>06</b>	13	4	19	2	5	<b>56</b>	5	15	10	1	16
<b>07</b>	1	18	16	17	15	<b>57</b>	4	2	12	19	6
<b>08</b>	5	17	19	1	8	<b>58</b>	8	3	13	6	19
<b>09</b>	8	9	18	7	12	<b>59</b>	13	2	18	7	5
<b>10</b>	17	10	4	7	18	<b>60</b>	14	20	13	11	8
<b>11</b>	14	8	1	12	11	<b>61</b>	13	15	2	9	11
<b>12</b>	10	13	9	19	10	<b>62</b>	12	12	17	7	13
<b>13</b>	6	9	3	3	20	<b>63</b>	14	9	18	7	3
<b>14</b>	16	3	17	18	20	<b>64</b>	18	1	4	9	1
<b>15</b>	15	7	3	8	8	<b>65</b>	17	5	13	17	6
<b>16</b>	5	6	15	20	13	<b>66</b>	8	10	16	17	17
<b>17</b>	2	15	9	9	16	<b>67</b>	6	4	17	16	12
<b>18</b>	7	2	3	3	3	<b>68</b>	16	3	7	7	14
<b>19</b>	18	9	9	11	13	<b>69</b>	11	12	7	3	15
<b>20</b>	13	11	14	14	14	<b>70</b>	17	15	2	8	13
<b>21</b>	7	2	13	20	8	<b>71</b>	12	11	3	3	14
<b>22</b>	6	18	3	14	12	<b>72</b>	3	18	3	9	3
<b>23</b>	7	14	1	11	12	<b>73</b>	8	16	12	1	19
<b>24</b>	5	3	6	19	9	<b>74</b>	9	12	13	16	15
<b>25</b>	10	8	3	9	16	<b>75</b>	5	14	17	1	11
<b>26</b>	11	9	8	8	9	<b>76</b>	20	19	4	17	13
<b>27</b>	3	2	3	8	10	<b>77</b>	10	5	1	1	10
<b>28</b>	15	20	12	8	19	<b>78</b>	6	12	5	14	18

№ варианта	№ задач					№ варианта	№ задач				
	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5		Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
<b>29</b>	17	15	12	16	18	<b>79</b>	7	5	4	17	3
<b>30</b>	14	2	8	18	14	<b>80</b>	18	20	19	18	3
<b>31</b>	2	8	1	18	20	<b>81</b>	12	9	1	2	14
<b>32</b>	10	1	14	18	9	<b>82</b>	3	6	6	7	4
<b>33</b>	3	4	4	10	15	<b>83</b>	14	8	7	7	3
<b>34</b>	11	1	7	13	5	<b>84</b>	6	14	4	19	15
<b>35</b>	1	15	4	2	19	<b>85</b>	13	15	18	4	6
<b>36</b>	11	8	11	6	9	<b>86</b>	20	4	4	11	19
<b>37</b>	10	3	12	14	19	<b>87</b>	17	13	1	8	1
<b>38</b>	12	6	19	18	6	<b>88</b>	18	7	20	3	6
<b>39</b>	2	1	3	10	6	<b>89</b>	15	6	18	12	16
<b>40</b>	13	16	8	15	4	<b>90</b>	4	12	13	16	19
<b>41</b>	7	19	3	11	15	<b>91</b>	17	19	4	17	15
<b>42</b>	14	8	14	10	1	<b>92</b>	13	11	3	20	20
<b>43</b>	2	15	4	15	15	<b>93</b>	2	17	9	18	10
<b>44</b>	13	13	13	12	11	<b>94</b>	13	2	12	4	20
<b>45</b>	10	6	15	16	16	<b>95</b>	2	19	16	9	17
<b>46</b>	7	1	18	20	7	<b>96</b>	15	6	2	2	9
<b>47</b>	3	8	2	14	18	<b>97</b>	11	5	5	11	15
<b>48</b>	20	4	10	11	8	<b>98</b>	19	6	17	5	7
<b>49</b>	13	2	19	3	7	<b>99</b>	7	6	18	8	4